

ÉLÉMENTS DE CALCUL POUR L'ASTRONOMIE

VISION HÉLIOCENTRIQUE DES PLANÈTES

(3^E PARTIE)

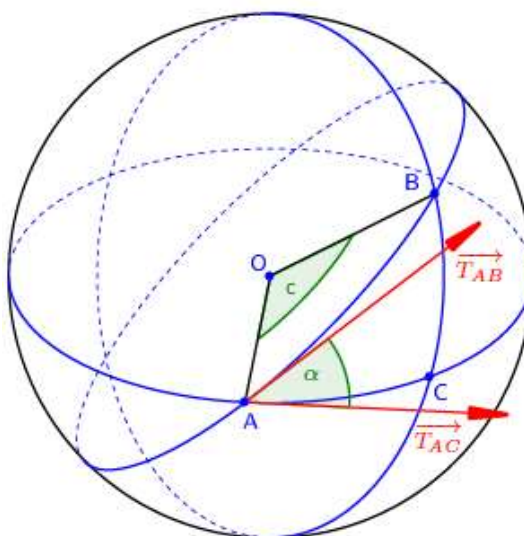
Alain Satabin

Le but de cette partie est de déterminer, à un instant donné, les coordonnées écliptiques héliocentriques des planètes, en nous limitant à la Terre et à celles visibles à l'œil nu (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne), ainsi que les distances séparant ces planètes du Soleil.

1. Géométrie sur la sphère

Sur une sphère, la distance la plus courte entre deux points est un arc de grand cercle, c'est à dire un cercle obtenu comme intersection de la sphère avec un plan passant par son centre. Ces arcs de grand cercle sont à la géométrie sphérique ce que les segments de droite sont à la géométrie plane. Un triangle sphérique est constitué de trois arcs de grands cercles se coupant aux sommets du triangle (par exemple le triangle ABC sur la figure).

En travaillant sur une sphère de rayon 1, la longueur d'un côté de triangle sphérique est l'angle au centre formé par les deux sommets, exprimé en radian entre 0 et π (c'est un angle géométrique).



Par exemple, sur la figure, $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = c$. Quant à l'angle au sommet dans un triangle sphérique, c'est l'angle formé par les tangentes aux grands cercles qui portent les côtés adjacents. Par exemple, sur la figure, $\widehat{BAC} = \hat{A} = \alpha$. On remarquera que c'est aussi l'angle entre les deux plans définissant les grands cercles en question (sur la figure, les plans (OAB) et (OAC)).

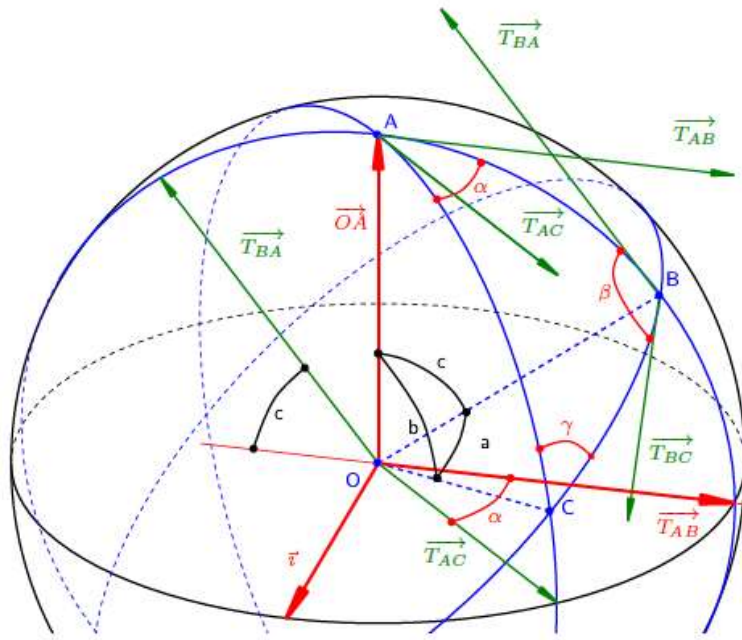
1.1 Les notations

On notera $\overrightarrow{T_{PQ}}$ le vecteur unitaire dirigeant la tangente en P au grand cercle passant par P et Q, dirigé de P vers Q.

Considérons donc un triangle sphérique (ABC), de « côtés » a, b et c , et dont les angles aux sommets sont α, β et γ . Ces 6 données sont des angles géométriques compris entre 0 et π et donc leurs sinus sont tous positifs.

Le vecteur $\overrightarrow{T_{AB}}$ étant orthogonal à $\overrightarrow{OA}$, choisissons le vecteur $\vec{i}$ tel que $\mathcal{R} = (\vec{i}, \overrightarrow{T_{AB}}, \overrightarrow{OA})$ soit un repère orthonormé direct selon la règle des trois doigts de la main droite. Nous avons donc le schéma suivant

[Retour au sommaire](#)



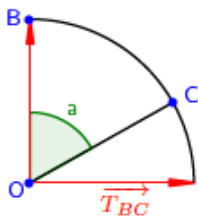
1.2 Les formules

Nous avons, dans $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(c) \\ \cos(c) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} \sin(b) \sin(\alpha) \\ \sin(b) \cos(\alpha) \\ \cos(b) \end{pmatrix} \text{ avec } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB \times OC \cos(\widehat{BOC}) = \cos(a)$$

En opérant sur les coordonnées, on obtient la première formule :

$$\boxed{\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha)} \quad \text{(Formule 1)}$$



Par ailleurs, remarquons que $(\overrightarrow{T_{BC}}, \overrightarrow{OB})$ forme un repère orthonormé du plan (OBC) dans lequel on a

$$\overrightarrow{OC} = \cos(a) \overrightarrow{OB} + \sin(a) \overrightarrow{T_{BC}}$$

Ce qui donne, dans $\mathcal{R}$

$$\sin(a) \overrightarrow{T_{BC}} = \overrightarrow{OC} - \cos(a) \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \sin(b) \sin(\alpha) \\ \sin(b) \cos(\alpha) - \cos(a) \sin(c) \\ \cos(b) - \cos(a) \cos(c) \end{pmatrix}$$

D'autre part nous avons

$$\overrightarrow{T_{BA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(c) \\ \sin(c) \end{pmatrix}$$

Et nous savons que

$$\sin(a) \overrightarrow{T_{BC}} \cdot \overrightarrow{T_{BA}} = \sin(a) \|\overrightarrow{T_{BC}}\| \times \|\overrightarrow{T_{BA}}\| \times \cos(\overrightarrow{T_{BC}}, \overrightarrow{T_{BA}}) = \sin(a) \cos(\beta).$$

Ce qui, en opérant le produit scalaire sur les coordonnées, fournit une deuxième formule

$$\boxed{\sin(a) \cos(\beta) = \sin(c) \cos(b) - \cos(c) \sin(b) \cos(\alpha)} \quad \text{(Formule 2)}$$

[Retour au sommaire](#)

Enfin, un habile produit vectoriel joint à l'utilisation de la première formule donne

$$\sin(a) \overrightarrow{T_{BC}} \wedge \overrightarrow{T_{BA}} = \begin{pmatrix} \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha) - \cos(a) \\ -\sin(c) \sin(b) \sin(\alpha) \\ -\cos(c) \sin(b) \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\sin(a) \overrightarrow{T_{BC}} \wedge \overrightarrow{T_{BA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(c) \sin(b) \sin(\alpha) \\ -\cos(c) \sin(b) \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $\|\sin(a) \overrightarrow{T_{BC}} \wedge \overrightarrow{T_{BA}}\| = \sin(b) \sin(\alpha)$

Comme $\|\sin(a) \overrightarrow{T_{BC}} \wedge \overrightarrow{T_{BA}}\| = \sin(a) \times \|\overrightarrow{T_{BC}}\| \times \|\overrightarrow{T_{BA}}\| \times |\sin(\overrightarrow{T_{BC}}, \overrightarrow{T_{BA}})| = \sin(a) \sin(\alpha)$.

On en déduit la troisième formule

$$\boxed{\sin(b) \sin(\alpha) = \sin(a) \sin(\beta)} \quad \textbf{(Formule 3)}$$

On notera au passage que cette troisième formule présente une forte analogie avec la relation des sinus dans un triangle en géométrie plane.

2. Position d'une planète sur son orbite

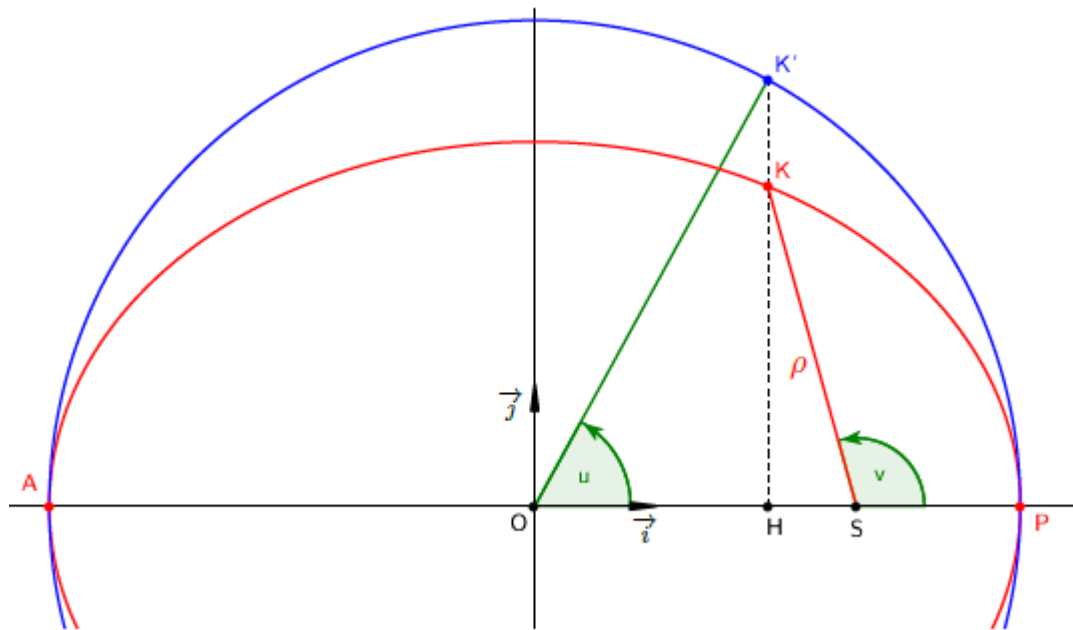
2.1 Lois de Kepler

Les planètes tournent autour du Soleil selon des ellipses, le Soleil occupant la position d'un foyer (première loi de Kepler). L'aire balayée par le segment Soleil-Planète par unité de temps est constant (deuxième loi de Kepler) et le cube du demi-grand axe est proportionnel au carré de la période (troisième loi de Kepler). Vu du pôle nord écliptique, les planètes tournent sur leur orbite dans le sens direct (anti-horaire) et les angles seront comptés dans ce sens.

Dans un premier temps, nous allons positionner la planète par rapport au périhélie de son orbite. Les angles seront mesurés en radians dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ lors des calculs puis reconvertis en degrés ensuite.

2.2 Notations

- K : la planète étudiée (orbite en rouge sur le dessin)
- O : centre de l'ellipse
- S : le Soleil (un des foyers de l'ellipse)
- A : *aphélie* de l'orbite (point le plus éloigné du Soleil)
- P : *périhélie* de l'orbite (point le plus près du Soleil)
- a : demi-grand axe de l'ellipse
- b : demi-petit axe de l'ellipse
- c : demi-distance focale (nous avons $c = OS = \sqrt{a^2 - b^2}$)
- e : excentricité de l'ellipse (nous avons $0 < e < 1$, $e = \frac{c}{a}$ et $b^2 = a^2(1 - e^2)$)
- K' : point du cercle principal (centre O et rayon a , en bleu sur la figure) de même abscisse que K
- v : *anomalie vraie* (c'est l'angle $(\overrightarrow{SP}; \overrightarrow{SK'})$)
- u : *anomalie excentrique* (c'est l'angle $(\overrightarrow{OS}; \overrightarrow{OK'})$)
- T : période de révolution de la planète
- ρ : distance de la planète au Soleil ($r = SK$)



2. 3 Calculs

2. 3. 1 Relation entre u et v

Il est clair que $v = \pi \Leftrightarrow u = \pi$. Éliminons donc ce cas et travaillons pour $u \in]-\pi; \pi[$.

Le point K a pour coordonnées $(a \cos(u); b \sin(u)) = (a \cos(u); a \sqrt{1-e^2} \sin(u))$.

Par ailleurs, comme

$$S(ae; 0) \quad P(a; 0) \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{SP} \begin{pmatrix} a(1-e) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{SK} \begin{pmatrix} a(\cos(u) - e) \\ a\sqrt{1-e^2} \sin(u) \end{pmatrix}.$$

Ce qui conduit à la relation

$$\boxed{\rho = SK = a(1 - e \cos(u))} \quad (1)$$

Et d'autre part, $\cos(v) = \frac{\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SK}}{SP \times SK} = \frac{\cos(u) - e}{1 - e \cos(u)}.$

Grâce aux formules $\cos(u) = \frac{1 - \tan^2(\frac{u}{2})}{1 + \tan^2(\frac{u}{2})}$ et $\cos(v) = \frac{1 - \tan^2(\frac{v}{2})}{1 + \tan^2(\frac{v}{2})},$

on aboutit finalement à $\tan^2\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1+e}{1-e} \tan^2\left(\frac{u}{2}\right).$

Compte tenu du fait que $\frac{u}{2}$ et $\frac{v}{2}$ appartiennent au même quadrant (le 4^e ou le 1^{er}), leurs tangentes

ont le même signe, et donc $\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{u}{2}\right),$

et comme $\frac{v}{2} \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, cela donne

$$\boxed{v = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{u}{2}\right)\right)} \quad (2)$$

(avec, rappelons-le, le cas limite $u = \pi \Rightarrow v = \pi$)

2. 3. 2 La loi des aires

L'aire balayée par $\overrightarrow{SK}$ par unité de temps est constante (deuxième loi de Kepler). La considération d'une révolution complète nous permet de voir que cette constante vaut $\frac{\pi ab}{T}$. Ainsi, l'aire balayée par $\overrightarrow{SK}$ durant l'intervalle de temps Δt est $\Delta A = \frac{\pi ab}{T} \Delta t$.

Prenons pour référence l'instant t_0 de passage au périhélie et soit t l'instant qui nous préoccupe. Posons $\Delta t = t - t_0$ et plaçons-nous pour $0 \leq \Delta t \leq \frac{T}{2}$, c'est à dire dans la demi-période qui suit le passage au périhélie.

ΔA est donc l'aire du secteur elliptique SPK , c'est à dire l'aire du secteur elliptique OPK privé de l'aire du triangle OSK , et le secteur elliptique OPK est l'image par l'affinité de base (Ox) , de direction (Oy) , et de rapport $\frac{b}{a}$, du secteur circulaire OPK' :

$$\text{aire du secteur circulaire } OPK' = \frac{u}{2} a^2$$

$$\text{aire du secteur elliptique } OPK = \frac{b}{a} \times \frac{u}{2} a^2 = \frac{abu}{2}$$

$$\text{aire du triangle } OSK = \frac{ae \times b \sin(u)}{2} = \frac{ab e \sin(u)}{2}$$

D'où
$$\frac{\pi ab}{T} (t - t_0) = \Delta A = \frac{ab}{2} (u - e \sin(u)).$$

Dans la demi-période précédant le passage au périhélie, $-\frac{T}{2} \leq \Delta t \leq 0$, la symétrie du problème et l'impairité des fonctions de u du membre de droite nous permettent de voir que cette relation reste vraie.

La quantité $M = \frac{2\pi(t-t_0)}{T}$ s'appelle *l'anomalie moyenne*. C'est la position sur le cercle principal d'une planète qui y tournerait à vitesse constante avec la même période que K , coïncidant avec elle en P à l'instant t_0 .

Nous avons donc

$$\boxed{u - e \sin(u) = M} \quad (3)$$

2. 3. 3 Le calcul de u

M étant donné dans $]-\pi; +\pi]$ l'équation en u (3) ne peut se résoudre de façon exacte.

En posant $f(x) = M + e \sin(x)$, (3) équivaut à $f(u) = u$.

Cherchons donc un point fixe de cette fonction dans $]-\pi; +\pi]$. On remarquera que la fonction $(x \mapsto f(x) - x)$ décroît strictement sur $\mathbb{R}$ de $+\infty$ à $-\infty$, ce qui assure l'existence et l'unicité d'un point fixe pour f .

Qui plus est, $g(-\pi) = M + \pi > 0$ et $g(\pi) = M - \pi \leq 0$. Cela prouve que ce point fixe de f est bien situé dans $]-\pi; +\pi]$.

Par ailleurs, on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\pi - e \leq f(x) \leq \pi + e$$

Donc l'intervalle $I = [-\pi - e; \pi + e]$ est stable par f et de plus $\forall x \in I, |f'(x)| \leq e < 1$.

Comme $M \in I$, nous déduisons de tout cela que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = M \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers l'unique point fixe de f , c'est-à-dire la valeur u cherchée.

L'inégalité des accroissements finis et le fait que M et u sont tous les deux dans le même intervalle $[0; \pi]$ ou $]-\pi; 0[$ nous permettent de prouver que

$$\boxed{q = 1 + E\left(-\frac{p + \log(\pi)}{\log(e)}\right) \Rightarrow |u - u_q| \leq 10^{-p} \text{ avec } \begin{cases} u_0 = M = f(0) \\ u_{n+1} = M + e \sin(u_n) = f(u_n) \end{cases}} \quad (4)$$

Rappelons que dans ce calcul, les angles sont en radians. Une fois calculé u , nous le remettons en degrés. Nous travaillerons avec une précision du centième de degré, c'est à dire une précision de 4 décimales sur les angles exprimés en radians.

Pour les distances, nous nous contenterons de trois décimales en unité astronomique (environ 149 597 870 km).

2. 3. 4 Données planétaires

Le calcul de M dépend uniquement de données planétaires (période et dernier passage au périhélie) et se fait grâce à des formules affines en référence à la position au 0 janvier 1901¹ à (00 : 00 TU) et en tenant compte de l'heure d'observation $hh : mm$ (TU). La valeur trouvée sera évidemment remise dans l'intervalle $]-\pi; +\pi]$.

$N = \text{NbresJours1901}(J; M; A) + hh/24 + mm/1440$				
	a en Unités Astronomiques	$M = x + yN$ en radians		
		e	x	y
Mercure	0,387	0,205 6	2,686 7	0,071 424 710
Vénus	0,723	0,006 8	1,336 6	0,027 962 446
Terre	1,000	0,016 7	- 0,039 7	0,017 201 969
Mars	1,524	0,093 3	2,627 2	0,009 145 886
Jupiter	5,203	0,048 3	- 1,821 9	0,001 450 113
Saturne	9,555	0,055 9	-3,008 0	0,000 583 712

2. 3. 5 Un exemple

Considérons la planète Saturne le 24 mars 2021 à (22 : 24 TU).

$$N = \text{NbresJours1901}(24; 03; 2021) + \frac{22}{24} + \frac{24}{1440} \approx 43913,9$$

Et le tableau nous fournit

$$M \approx -3,0080 + 0,000583712 \times 43913,9 \approx 22,6251$$

Ce qui donne, remis dans $]-\pi; +\pi]$ modulo 2π

$$M = 22,6251 + 2 \times \pi \times E\left(0,5 - \frac{22,6251}{2 \times \pi}\right) \approx -2,5077$$

Nous avons donc

$$f(x) = -2,5077 + 0,0559 \sin(x)$$

Et pour une précision de 4 décimales, il nous faudra réitérer le calcul jusqu'au terme de rang

$$q = 1 + E\left(-\frac{p + \log(\pi)}{\log(e)}\right) = 1 + E\left(-\frac{4 + \log(3,141592)}{\log(0,0559)}\right) = 4$$

L'application successive de f donne

$$u \approx u_4 = f \circ f \circ f \circ f \circ f(0) \approx -2,5394$$

Ce qui entraine pour l'anomalie vraie

$$v \approx 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+0,0559}{1-0,0559}} \tan\left(\frac{-2,5394}{2}\right)\right) \approx 2,5704 \text{ radians} \approx -147,27^\circ$$

Et pour la distance Soleil-Saturne

$$\rho \approx 9,555(1 - 0,0559 \cos(2,5704)) \approx 10,0043$$

Comme nous en aurons besoin ultérieurement, livrons-nous au même exercice pour la Terre

$$M_T \approx -0,0397 + 0,017201969 \times 43913,9 \approx 755,3658$$

¹ [PV144 calendrier](#)

Remis dans $] -\pi; +\pi]$ modulo 2π ,

$$M_T = 755,3658 + 2 \times \pi \times E\left(0,5 - \frac{755,3658}{2 \times \pi}\right) \approx 1,3835$$

La fonction utile est cette fois

$$f_T(x) = 1,3835 + 0,0167 \sin(x)$$

D'où l'anomalie excentrique de la Terre

$$u_T \approx f_T \circ f_T \circ f_T \circ f_T \circ f_T(0) \approx 1,3999$$

Puis son anomalie vraie

$$v_T \approx 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+0,0167}{1-0,0167}} \tan \left(\frac{1,3999}{2} \right) \right) \approx 1,4164 \text{ radians} \approx 81,1526^\circ$$

Et enfin sa distance au Soleil

$$\rho_T \approx 1,000(1 - 0,0167 \cos(1,3999)) \approx 0,9972$$

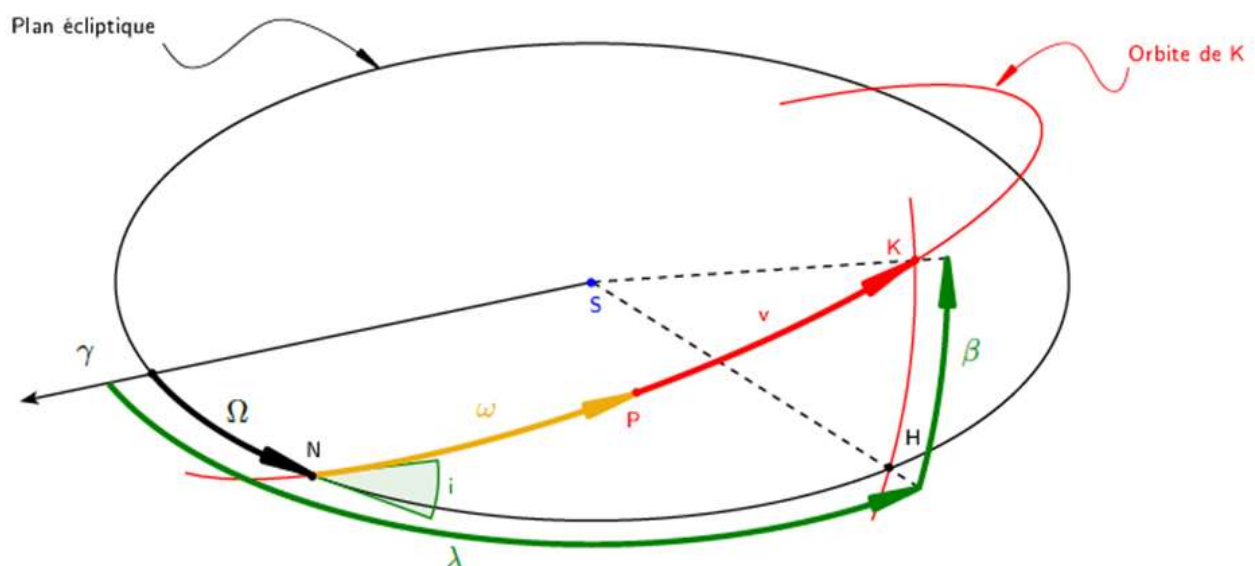
3. 3 Coordonnées écliptiques héliocentriques des planètes

3. 1 Éléments des orbites planétaires

Les planètes n'orbitent hélas pas dans le même plan que celui de la Terre. En plus du demi grand axe et de l'excentricité (déjà donnés précédemment), les calculs nécessitent les éléments orbitaux suivants:

- le nœud ascendant N
- la longitude du nœud ascendant Ω
- l'argument de latitude du périhélie ω
- l'inclinaison sur l'écliptique i

Le tout pour pouvoir calculer les longitude λ et latitude β écliptiques héliocentriques de la planète K .



L'influence des planètes les unes sur les autres font pivoter les orbites et modifient évidemment au cours du temps les valeurs de Ω et ω (on négligera l'évolution de i). Comme pour l'anomalie moyenne, ces valeurs se calculent à partir d'une date de référence, mais cette fois nous travaillerons en degrés.

$N = \text{NbresJours}1901(J; M; A) + hh/24 + mm/1440$					
	i	$\Omega = x + yN$ en degrés		$\omega = z + wN$ en degrés	
	en degrés	x	y	z	w
Mercure	7,00	47,16	0,000 032 4	28,76	0,000 010 1
Vénus	3,39	75,79	0,000 024 6	54,39	0,000 013 9
Terre	0	0	0	101,24	0,000 047 1
Mars	1,85	48,79	0,000 021 1	- 74,56	0,000 029 3
Jupiter	1,31	99,45	0,000 027 7	- 86,72	0,000 016 4
Saturne	2,49	112,88	0,000 023 9	- 21,68	0,000 029 7

Pour information, l'angle $\overline{\omega} = \Omega + \omega$ est appelé la *longitude du périhélie*.

3. 2 Expression de λ et β

Dans le triangle sphérique NHK , rectangle en H , la relation $\sin(b) \sin(\alpha) = \sin(a) \sin(\beta)$ (**Formule 3** démontrée dans la première partie) nous donne $\sin(\beta) \sin(90) = \sin(i) \sin(\omega + v)$. Et comme $\beta \in] - 90; +90[$, on obtient

$$\boxed{\beta = \arcsin(\sin(i) \sin(\omega + v))} \quad (5)$$

Par ailleurs, la relation $\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha)$ (**Formule 1** démontrée dans la première partie) nous donne

$$\cos(\omega + v) = \cos(\beta) \cos(\lambda - \Omega) + \sin(\beta) \sin(\lambda - \Omega) \cos(90)$$

Et donc :

$$\cos(\lambda - \Omega) = \frac{\cos(\omega + v)}{\cos(\beta)}$$

Enfin, la relation $\sin(a) \cos(\beta) = \sin(c) \cos(b) - \cos(c) \sin(b) \cos(\alpha)$ (**Formule 2** démontrée dans la première partie) nous donne

$$\sin(\omega + v) \sin(i) = \sin(\lambda - \Omega) \cos(\beta) - \cos(\lambda - \Omega) \sin(\beta) \cos(90)$$

Et donc

$$\sin(\lambda - \Omega) = \frac{\sin(\omega + v) \sin(i)}{\cos(\beta)}$$

Comme $\cos(\beta)$ et $\sin(i)$ sont des quantités positives, le signe de $\sin(\lambda - \Omega)$ est le même que celui de $\sin(\omega + v)$. D'où

$$\boxed{\lambda = \Omega + \text{Sgn}(\sin(\omega + v)) \arccos\left(\frac{\cos(\omega + v)}{\cos(\beta)}\right)} \quad (6)$$

Remarquons que dans le cas de la Terre, les formules se simplifient considérablement

$$\beta_T = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_T = \omega_T + v_T$$

3.3 Un exemple

Le 24 mars 2021 à (22: 24 TU) pour la planète Saturne, nous avons

$$\Omega = 112,88 + 43913,9 \times 0,0000239 \approx 113,93^\circ$$

$$\text{et } \omega = -21,68 + 0,0000297 \times 43913,9 \approx -20,38^\circ$$

Ce qui donne pour la latitude écliptique

$$\beta = \arcsin(\sin(2,49) \sin(-20,38 - 147,27))$$

Et comme $\sin(-20,38 - 147,27) < 0$, on a:

$$\lambda = 113,93 - \arccos\left(\frac{\cos(-20,38 - 147,27)}{\cos(-0,53)}\right) \approx 306,2^\circ$$

Et pour la Terre, les calculs nous donnent:

$$\Omega_T = 0 \quad \text{et} \quad \omega_T = 101,24 + 0,0000471 \times 43913,9 \approx 103,31^\circ$$

$$\beta_T = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_T \approx 103,31 + 81,15 = 184,46^\circ$$