Python :

```
def monnaie(n):  # n doit être supérieur à 188
    """ Fonction monnaie(n : entier; rendu : liste d'entiers)
    n : somme d'argent que l'on souhaite détailler
    especes : liste d'entiers, liste des espèces du système monétaire considéré
    somme : entier, somme restante après chaque étape
    i : entier, indice de boucle
    q, r : entiers, quotient et reste de la division de somme par especes[i]
    renvoie rendu, la liste des quantités de chaque espèce à rendre
    """

    especes=[100,50,20,10,5,2,1]
    rendu=[1,1,1,1,1,1,1]
    somme=n-188
    for i in range(7):
        q=somme//especes[i]
        r=somme%especes[i]
        rendu[i]=q+rendu[i]
        somme=r
    return(rendu)
```

Note : ce problème peut rappeler le problème de rendu de monnaie (on rend la somme la plus grande possible à chaque espèce puis on passe à celle qui est directement inférieure). La différence, dans cet exercice, est que l'on ne rend pas de monnaie – mais c'est assez secondaire – et surtout que l'on impose une espèce de chaque sorte. Le problème de rendu de monnaie est un algorithme glouton classique. Pour rappel, les algorithmes gloutons ont comme objectif d'optimiser un problème de façon globale en l'optimisant localement à chaque étape. L'algorithme de Dijkstra, pratiqué en spécialité ES, est un autre exemple d'algorithme glouton. Le problème de rendu de monnaie est ce qu'on appelle un problème NP-complet (il est d'autant plus long à résoudre que l'on a beaucoup de types de pièces et l'on ne sait pas diminuer ce temps de résolution). Pour les systèmes monétaires dits canoniques, l'algorithme donne effectivement une solution optimale unique. Presque tous les systèmes monétaires du monde ont cette propriété, mais il n'en pas toujours été ainsi : le système anglais a dû évoluer en 1971 pour cette raison.

PROBLÈME 142

proposé par Fabien Lombard

On se donne ABC un triangle et α un nombre strictement supérieur à 1.

Soit d un nombre strictement positif ; on trace, à l'extérieur du triangle ABC, les parallèles à ses côtés à la distance d de ceux-ci. Elles définissent un nouveau triangle $A'B'C'$.

Peut-on tracer $A'B'C'$ à la règle et au compas de telle manière que $Aire(A'B'C') = \alpha\, Aire(ABC)$?

Retour au sommaire

SOLUTION DU PROBLÈME 141

Philippe Févotte

Trois réponses ont été envoyées, l'une par Fabien Lombard, une seconde par Jacques Choné et enfin une troisième par Claude Morin qui propose une généralisation.

Pour Jacques Choné, une étude élémentaire de la fonction $y \to y + \frac{1}{y}$ montre que l'équation $f(y) = a$ possède zéro solution, une seule solution « double » ou deux solutions distinctes selon que $a < 2$, $a = 2$ ou $a > 2$.
D'après la bijectivité de la fonction cube, il en est de même pour l'équation E_1

Une étude élémentaire de la fonction $f\colon x \to x^3 - 3x$ montre que pour ≥ 2 , d'une part l'équation E_2 possède une unique solution réelle γ et que, d'autre part, de $f(2) = 2$ on déduit $\gamma \geq 2$.

Posons $u = x + \frac{1}{x}$ où x est la solution de E_2 . On a alors :

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) - 6$$

Donc $x^4 + \frac{1}{x^4} = u^4 - 4u^2 + 2$

Par ailleurs, $u^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = a + 3u$
Par conséquent u est solution de E_2 et on en déduit que $u = \gamma$ et donc

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \gamma^4 - 4\gamma^2 + 2$$

Fabien Lombard et Claude Morin parviennent aux mêmes résultats en étudiant le système : $X = x^3$ et $X^2 - aX + 1 = 0$ qui n'a de solutions que pour $a \geq 2$.

Claude Morin propose une généralisation de ce résultat.

En effet, $x^n + \frac{1}{x^n} = T_n(x + \frac{1}{X})$ où T_n est le polynôme de degré n défini par $T_0 = 2$, $T_1 = X$ et la relation de récurrence $T_{n+1} = XT_n - T_{n-1}$.

Il s'agit de polynômes de Tchebychev de première espèce ; ils vérifient $T_n\big(2cos(\theta)\big) = 2cos(n\theta)$

La factorisation s'en déduit immédiatement, pour $n \geq 1$: $T_n(X) = \prod_{k=1}^{n}\left(X - 2cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)$

On peut montrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $T_n(X) = \sum_0^{[n/2]}(-1)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} X^{n-2k}$.

On a donc pour $n \geq 1$, et x solution de E_1, $x^n + \frac{1}{x^n} = \sum_0^{[n/2]}(-1)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} \gamma^{n-2k}$

Retour au sommaire