DES PROBLEMES POUR LE PROFESSEUR

PROBLÈME 143

Proposé par Philippe Févotte

Soit pour k entier donné, la suite (u_n) définie pour les entiers $n \geq k$ par :

« u_n est le chiffre des unités de $\binom{n}{k}$ »

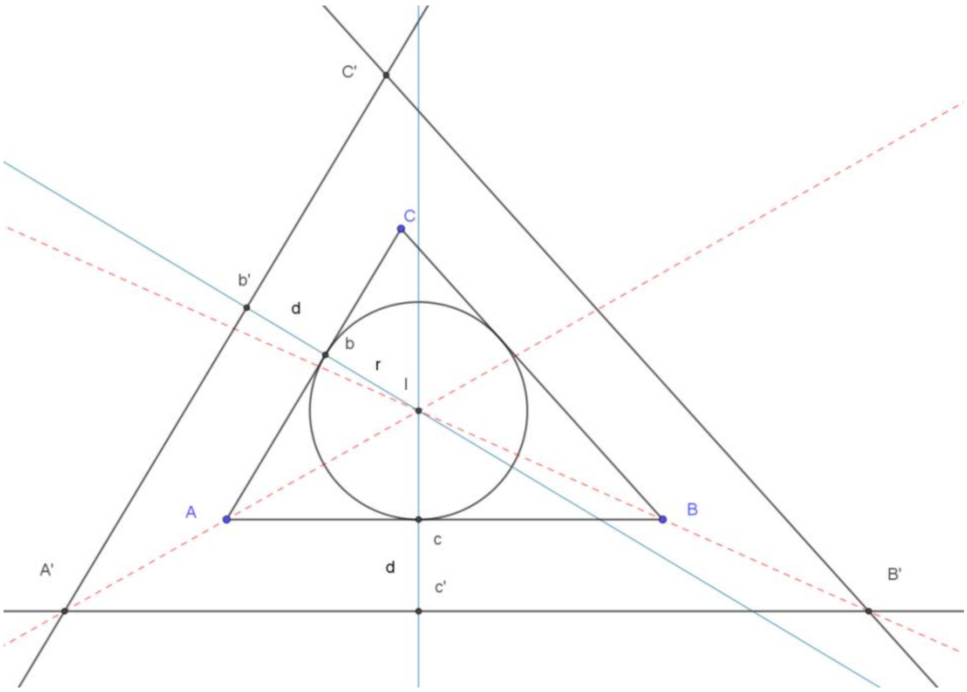
Montrer que le nombre $N_k = 0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots$ est un nombre rationnel

SOLUTION DU PROBLÈME 142

Deux solutions ont été proposées à ce problème, la première par Jacques Choné et la seconde par Gilles Waehren, qui a voulu ainsi saluer son collègue Fabien Lombard au moment où ce dernier part en retraite.

La solution la plus courte fait intervenir les transformations.

Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, r le rayon de ce cercle inscrit, b et b' les intersections respectives des perpendiculaires à AC et A'C' issues de I, avec les côtés AC et A'C'



Soit $\mathscr{H}$ l'homothétie de centre I qui transforme b en b'. Par construction du triangle A'B'C', cette homothétie transforme le triangle ABC en le triangle A'B'C'. Si on note k le rapport de cette homothétie on peut en déduire que :

Ib' = k Ib, soit r + d = k r et par conséquent $k = \frac{(r+d)}{r}$.

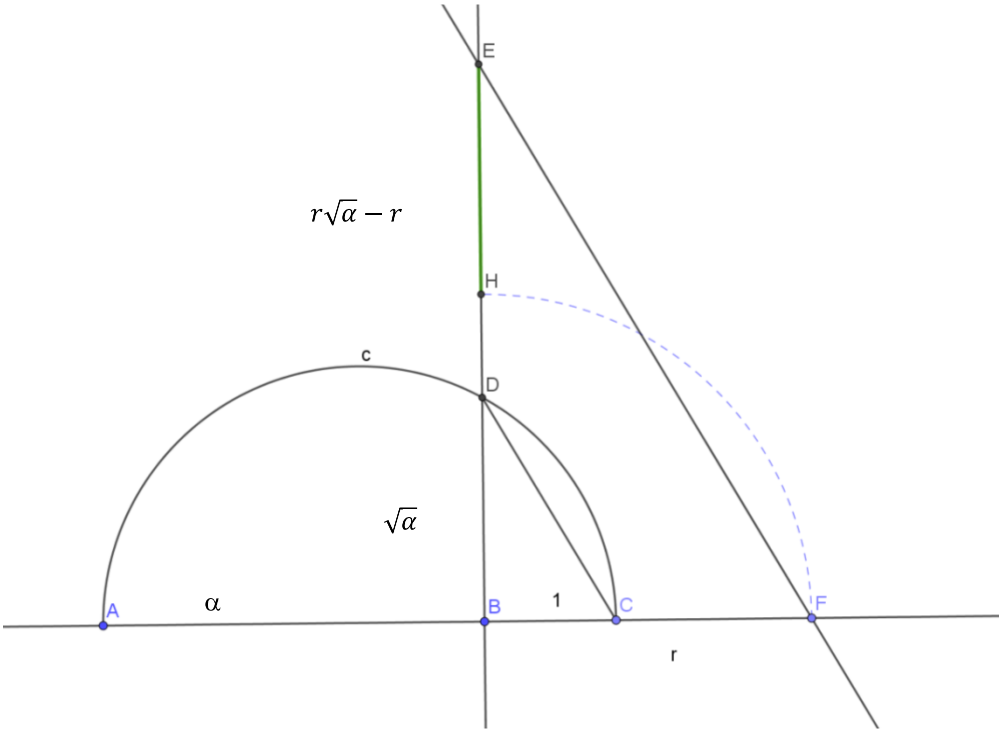
Par ailleurs on sait que : aire (A'B'C') = k^2 aire (ABC) et donc $k = \frac{(r+d)}{r} = \sqrt{\alpha}$. On en déduit que $d = r(\sqrt{\alpha} - 1)$

Le problème consiste à tracer à la règle et au compas le nombre d, ce qui est classique (à la condition, comme le signale Jacques Choné d'avoir en plus du triangle ABC, un segment de longueur 1 et (éventuellement) un segment de longueur α).

[Retour au sommaire]

On construit successivement $\sqrt{\alpha}$ (méthode de Descartes) puis $\sqrt{\alpha}-1$ et enfin $d=r(\sqrt{\alpha}-1)$ en utilisant la construction de Thalès.

La figure ci-dessous reprend cette construction.



la longueur d étant ainsi déterminée, il suffit alors de déterminer successivement :

- le point I (intersection de bissectrices)
- la perpendiculaire à AC issue de I
- le point b’
- le point A’ intersection des droites IA et de la parallèle à AC passant par b’
- la parallèle à AB passant par A’
- les points B’ et C’ comme intersection de parallèles passant par A’ aux côtés AB et AC et des droites IB et IC

Toutes ces constructions se faisant classiquement à la règle et au compas

Gilles Waehren a une approche différente sans s’appuyer sur les transformations. Il traduit les hypothèses en calculs sur les longueurs de segments intervenant sur la figure, et obtient les mêmes résultats en résolvant un système d’équations.

Retour sur le problème 140 : Une extension du problème proposée par Claude Morin.

Retour au sommaire