```
def carre_parfait(n):
    """ Fonction carre_parfait(n : entier; booléen)
    renvoie Vrai si n est un carré parfait, Faux sinon
    """
    i=0
    while i**2<n+1:
        if i**2==n:
            return True
        i=i+1
    return False

def proba_carre_parfait(hc,mc,hl,ml):
    """ Fonction proba_carre_parfait(hc,mc,hl,ml : entiers ; den, num : entiers)
    renvoie le numérateur et le dénominateur de la probabilité de tomber sur un
      carré parfait entre les heures hc:mc et hl:ml
    """
    nbCarres=0
    h=hc
    m=mc
    total=total_minutes(hc,mc,hl,ml)
    while h!=hl:
        if carre_parfait(h*100+m):
            nbCarres+=1
            print(h,":",m)
        m+=1
        if m==60:
            h+=1
            m=0
            if h==24:
                h=0
    while m!=ml:
        if carre_parfait(h*100+m):
            nbCarres+=1
            print(h,":",m)
        m+=1
    d=gcd(nbCarres,total)
    num=nbCarres//d
    den=total//d
    return num,den
```

PROBLÈME

LE PROBLÈME DU TRIMESTRE - N°144

Proposé par Philippe Févotte

Soit une suite (u_n) définie pour les entiers $n \geq 0$ et à termes positifs.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier par :

$$v_n = \sqrt{u_0 + \sqrt{u_1 + \sqrt{\dots + \sqrt{u_n}}}}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (v_n) converge

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte. Vous pouvez lui envoyer vos solutions à ce problème. **Des réponses, même partielles, seraient les bienvenues**, ainsi que toute proposition de nouveau problème.

Retour au sommaire

PROBLÈME

SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT - N°143

Une solution a été proposée par Jacques Choné.
Pour que N_k soit rationnel il suffit que son développement décimal illimité soit périodique à partir d'un certain rang.
Si $k = 0$, le résultat est immédiat, car $N_0 = 0{,}1111\ldots1\ldots = \frac{1}{9}$

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k,T} = \binom{n+T}{k} - \binom{n}{k}$
Il suffit donc de trouver un nombre *T*, indépendant de n, tel que $D_{n,k,T}$ soit un multiple de 10.
Montrons que $T = 10k!$ est un choix possible

$$\binom{n+T}{k} = \frac{1}{k!}(n+T)(n+T-1)(n+T-2)\ldots.(n+T-(k-1))$$

Soit $\binom{n+T}{k} = \frac{1}{k!}(n+T)(n-1+T)(n-2+T)\ldots.(n-(k-1)+T)$

D'où $\binom{n+T}{k} = \frac{1}{k!}((n)(n-1)(n-2)\ldots.\big(n-(k-1)\big)+TM)$ avec *M* entier.

Par conséquent $D_{n,k,T} = \frac{1}{k!}MT$ avec *M* entier

En choisissant $T = 10k!$, on obtient $D_{n,k,T} = 10M$ et ainsi le nombre $N_k = 0, u_k u_{k+1} u_{k+2}\ldots$ est un nombre rationnel.

Deux remarques :
La période $T = 10k!$ n'est pas toujours la plus petite. Un calcul montre que :

Valeur de *k*	2	3	4	5
Valeur de *T* minimale	20	20	40	200

Une étude générale demanderait d'évaluer les puissances de 10 dans la décomposition de *M*

Jacques Choné indique que la suite considérée est présente dans OEIS sous la référence A174183.

LA PHRASE DU TRIMESTRE

La plus utile règle de toute l'éducation ?
Ce n'est pas de gagner du temps, c'est d'en perdre.

ROUSSEAU

Retour au sommaire