

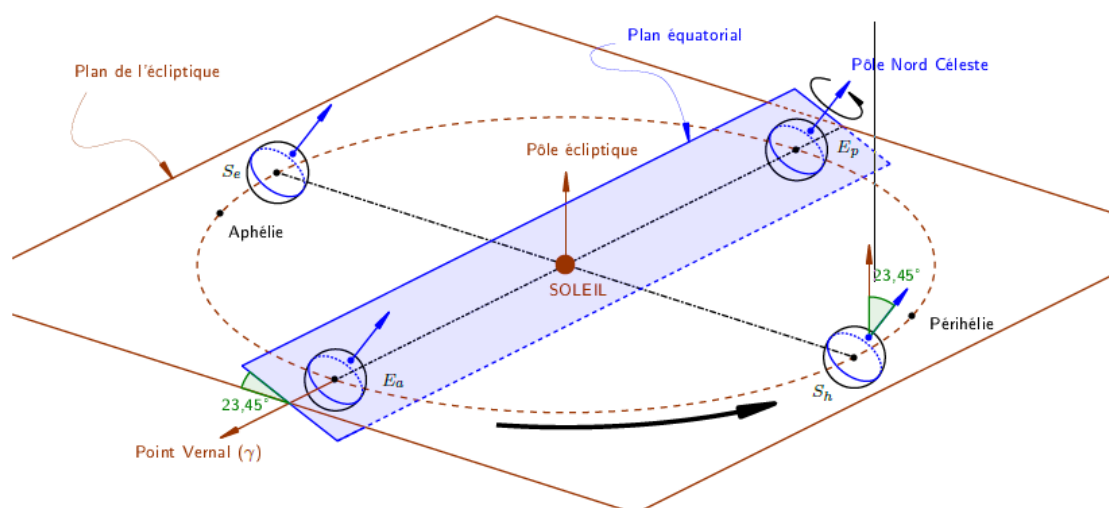
ÉTUDE MATHÉMATIQUE

ÉLÉMENTS DE CALCUL POUR L'ASTRONOMIE NOTIONS DE BASE (1^{ère} partie)

Alain Satabin

Comment se repérer dans l'espace et dans le temps ? Quelles coordonnées utiliser pour positionner les planètes dans le système solaire ? Alain Satabin nous aide à mieux comprendre l'astronomie en nous présentant les éléments de calculs et notions utiles. Commençons, dans cette première partie, par quelques notions de base.

1. LA TERRE AUTOUR DU SOLEIL



La Terre tourne autour du Soleil selon une orbite elliptique dont le Soleil occupe un foyer. Le plan contenant cette orbite s'appelle le *plan écliptique* et l'axe perpendiculaire à ce plan pointe vers un point de la voûte céleste appelé le *pôle écliptique nord* (situé dans la constellation du Dragon). La trace du plan écliptique sur la voûte céleste est simplement appelée *l'écliptique*. La Terre est au plus proche du Soleil lorsqu'elle passe au *périhélie* de son orbite, aux alentours du 3 janvier, et l'éloignement maximal se produit lorsqu'elle passe à *l'aphélie*, aux alentours du 4 juillet. Vu du pôle écliptique nord, la Terre tourne sur son orbite dans le sens direct trigonométrique.

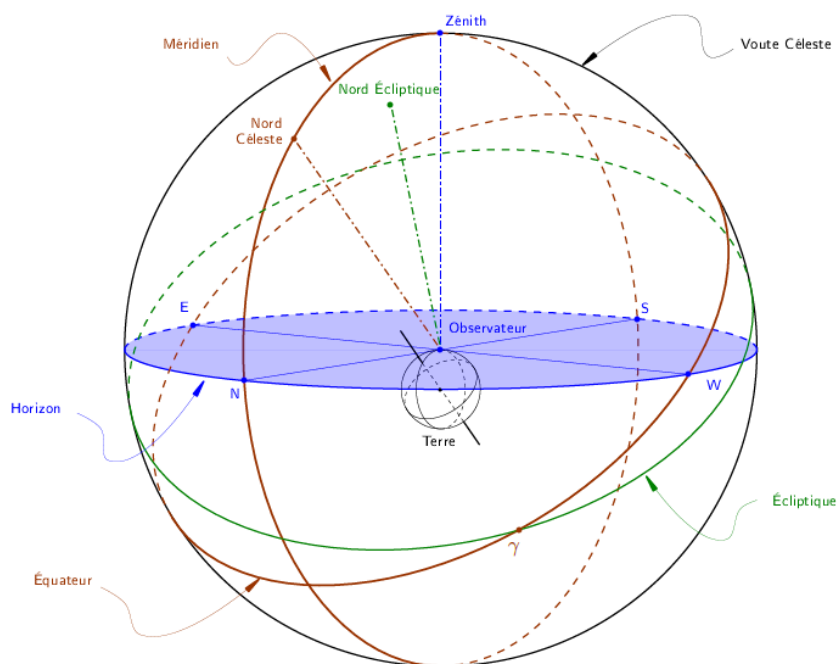
La Terre tourne également sur elle-même autour d'un axe pointant vers le *pôle nord céleste* situé actuellement à proximité de la tête de la Petite Ourse, nommée *étoile polaire*. Vu du pôle nord céleste, la rotation se fait aussi dans le sens direct trigonométrique. Cet axe fait un angle de $23,45^\circ$ par rapport à l'axe de l'écliptique. Le *plan équatorial* est défini comme étant le plan parallèle au plan équatorial terrestre passant par le Soleil. La trace du plan équatorial sur la voûte céleste définit *l'équateur céleste*. Ce plan équatorial intersecte le plan écliptique selon une droite appelée *ligne des nœuds*, sur laquelle la Terre passe deux fois dans l'année. Ce sont les *points équinoxiaux*. L'un d'entre eux joue un rôle primordial : le *point vernal*, traditionnellement repéré par la lettre grecque gamma (γ). C'est tout simplement le point de l'écliptique occupé par le Soleil, vu de la Terre, le jour de l'équinoxe de printemps. Par ailleurs, le plan défini par le Soleil et l'axe de la Terre est perpendiculaire au plan écliptique deux fois dans l'année, définissant ainsi les solstices. Sur le dessin ci-dessus, les points E_p , S_e , E_a et S_h représentent respectivement les équinoxe de printemps, solstice d'été, équinoxe d'automne et solstice d'hiver. L'*année tropique* est l'intervalle de temps séparant deux passages successifs de la Terre au point d'équinoxe de printemps et sera notée A_t dans ce document. Elle nous servira de base à la

[Retour au sommaire](#)

mesure du temps et à l'établissement d'un calendrier réglé sur les saisons. Dans ce document, nous négligerons la précession des équinoxes. Nous considérerons donc que le pôle nord céleste occupe une position fixe sur la voûte étoilée, ainsi que le point vernal (dans la constellation des Poissons). Plus exactement, nous considérerons que les étoiles occupent des positions fixes dans le repère lié à l'équateur céleste et au pôle nord céleste. Par ailleurs, nous supposerons que toutes les planètes du système solaire évoluent dans ce plan éclipstique, ce qui nous donnera une position approximative tout à fait raisonnable des positions planétaires pour les localiser dans le ciel.

2. L'OBSERVATEUR TERRESTRE

Considérons un observateur O , repéré sur le globe terrestre par sa latitude φ et sa longitude θ . La référence des longitudes étant le méridien de Greenwich, elles seront comptées positivement vers l'ouest et négativement vers l'est. Son référentiel local est formé du plan horizontal, tangent à la sphère terrestre en O et déterminant le cercle *horizon* sur la sphère céleste, et de l'axe vertical, interceptant la voûte céleste au *zénith* Z . Pour information, le point diamétralement opposé au zénith est le *nadir*. L'équateur céleste pour cet observateur coupe son plan horizontal selon la ligne est-ouest et le nord céleste N forme avec le zénith un angle correspondant à la colatitude du lieu ($90 - \varphi$). Le plan défini par O , N et Z est le *plan méridien* qui détermine le nord et le sud sur l'horizon de l'observateur. Le demi-cercle situé vers le sud de l'observateur est parfois simplement appelé le *méridien*. Enfin, l'écliptique coupe l'équateur céleste au point vernal et en son opposé, faisant avec le plan équatorial un angle de $23,45^\circ$. Au cours du temps, le Soleil et les planètes évoluent sur cet écliptique. Par exemple, le jour de l'équinoxe de printemps, le Soleil occupe la position du point vernal et va, chaque jour, se décaler d'environ 1° sur ce cercle (360° en 365 jours). Par ailleurs, au cours d'une journée pour l'observateur terrestre, l'ensemble de la voûte céleste fait un tour complet autour de l'axe reliant l'observateur au nord céleste.

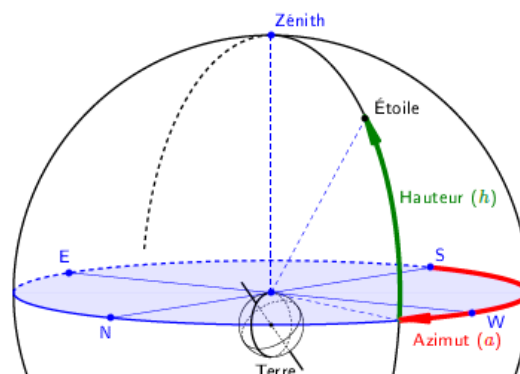


3. SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Évidemment, cette multiplicité de repères induit différents systèmes de coordonnées dans lesquels les angles sont parfois mesurés en degrés (géométrie), en radians (calculs mathématiques) ou en heures - minutes - secondes (problèmes liés au temps). Il nous faudra souvent jongler avec ces différentes unités. Rappelons que π radians valent 180° , que 15° correspondent à 1 heure, que 1° équivaut à 4 minutes et par conséquent que $1'$ vaut 4 secondes.

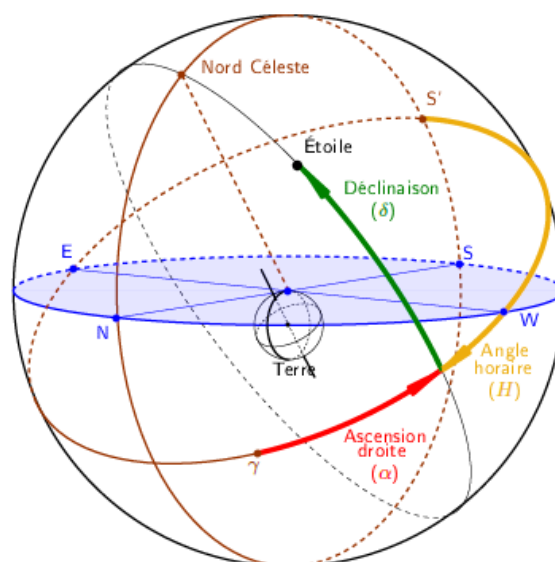
3.1 Coordonnées horizontales

C'est le repère local qui permet à l'observateur de repérer le plus simplement un objet dans le ciel. La contrepartie étant que dans ce repère, les coordonnées d'une étoile évoluent en fonction du temps. En astronomie, l'*azimut* (a) est mesuré à partir du sud dans le sens rétrograde (sens horaire de 0° à 360° , l'ouest ayant un azimut de 90°). La *hauteur* (h) mesure l'élévation de l'astre sur l'horizon, de -90° à $+90^\circ$, une hauteur négative signifiant évidemment que l'objet en question n'est pas visible car situé sous l'horizon. Pour le cas particulier du zénith, seule la hauteur (90°) a un sens l'azimut pouvant valoir n'importe quoi !



3.2 Coordonnées équatoriales

Pour les étoiles, ce sont des coordonnées absolues si on néglige leur mouvement propre ainsi que la précession des équinoxes. Nous retrouvons ici un système de coordonnées analogue à celui de repérage d'un point sur la Terre. Chaque point est repéré par son *ascension droite* α qui est l'angle (traditionnellement de 0 à 24h mais pour les calculs de 0° à 360°) de longitude mesuré dans le plan équatorial, avec référence au point vernal, dans le sens direct (anti-horaire), et la *déclinaison* (δ) qui est l'angle (de -90° à $+90^\circ$) de latitude mesuré le long du méridien céleste de l'objet, avec évidemment référence sur l'équateur céleste et orienté positivement vers le pôle nord céleste.



3.3 Coordonnées horaires

Elles sont elles aussi mesurées dans le référentiel équatorial et sont constituées de la déclinaison définie au paragraphe précédent, et de l'*angle horaire* (H) qui remplace l'ascension droite. Cet angle prend référence au point S' , intersection du méridien du lieu (au sud) et de l'équateur céleste, et évolue de 0° à 360° sur l'équateur céleste, orienté dans le sens rétrograde (sens des aiguilles d'une montre). Par exemple, sur la figure ci-dessus, α est aux environs de $+45^\circ$ et H aux environs de $+100^\circ$. Dans ce système de repérage, seule la déclinaison d'une étoile reste fixe, tandis que l'angle horaire évolue au cours du temps.

3.4 Coordonnées écliptiques

Le principe est le même que pour les coordonnées équatoriales, le nord céleste étant remplacé par le nord écliptique et l'équateur céleste par l'écliptique. La *latitude écliptique* (β) remplace la déclinaison et l'ascension droite cède sa place à la *longitude écliptique* (λ), comptée dans le sens direct sur l'écliptique et prenant référence au point vernal. On notera que ces coordonnées évoluent dans le temps et qu'elles sont particulièrement adaptées à l'étude du mouvement des planètes (pour lesquelles on fera l'approximation $\beta = 0$). Pour repérer les planètes, la longitude écliptique sera soit héliocentrique, soit géocentrique suivant qu'on centre le repère sur le Soleil ou la Terre.

4. BOÎTE À OUTILS

4.1 Quelques fonctions utiles

Les mathématiques vont évidemment jouer un rôle fondamental dans les études proposées ici, entre autres avec le chapelet des fonctions usuelles (racine carrée, fonctions trigonométriques et leur réciproques etc.). Par ailleurs, nous utiliserons plus que de raison les fonctions mathématiques suivantes (qui, si elles n'existent pas à l'état natif, peuvent être définies dans un programme de calcul ad hoc):

mod	opérateur d'entiers modulo : $(a \bmod b)$ est le reste de la division de a par b
div	opérateur d'entiers quotient entier : $(a \operatorname{div} b)$ est le quotient de la division de a par b
E	fonction réelle partie entière : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x
NonNul	fonction réelle détectant la nullité : $\text{NonNul}(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $= 0$ si $x = 0$
Abs	fonction valeur absolue : $\text{Abs}(x) = x$ si $x \geq 0$ et $\text{Abs}(x) = -x$ si $x < 0$
Sgn	fonction signe : $\text{Sgn}(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\text{Sgn}(x) = -1$ si $x < 0$

4.2 Quelques relations utiles

Soient x un réel et n un entier relatif.

$$E(x) = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1 \Leftrightarrow x - 1 < n \leq x$$

Soient a et b deux entiers, $b \neq 0$

$$(a \operatorname{div} b) = E\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{et} \quad (a \bmod b) = a - b \times E\left(\frac{a}{b}\right)$$

4.3 Représentant modulo p dans $[0; p[$

Notons $\bar{x}$ le représentant modulo p du nombre x dans l'intervalle $[0; p[$.

Remarquons que : $\bar{x} = x - kp$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \bar{x} < p \Leftrightarrow \frac{x}{p} - 1 < k \leq \frac{x}{p} \Leftrightarrow k = E\left(\frac{x}{p}\right)$

Ce qui donne :

$$\bar{x} = x - p E\left(\frac{x}{p}\right)$$

4.4 Représentant modulo p dans $\left]-\frac{p}{2}; +\frac{p}{2}\right]$

Notons $\bar{x}'$ le représentant modulo p du nombre x dans l'intervalle $\left]-\frac{p}{2}; +\frac{p}{2}\right]$.

Remarquons que : $\bar{x}' = x + kp$, $k \in \mathbb{Z}$, $-\frac{p}{2} < \bar{x}' \leq +\frac{p}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{x}{p} - 1 < k \leq \frac{1}{2} - \frac{x}{p} \Leftrightarrow k = E\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{p}\right)$

Ce qui donne :

$$\bar{x}' = x + p E\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{p}\right)$$