ÉTUDE MATHÉMATIQUE

ÉLÉMENTS DE CALCUL POUR L'ASTRONOMIE
LE CALENDRIER (2e PARTIE)

Alain Satabin

Le calendrier Grégorien, tel que nous l'utilisons, a été introduit vers la fin de l'année 1582 pour palier un décalage de la date de l'équinoxe devenant trop important. Les formules établies dans ce chapitre ne sont donc valables que pour un millésime au moins égal à 1583, même si, pour les besoins des calculs, on prolonge dans le passé jusqu'à une hypothétique année 0 le principe du calendrier Grégorien. Ce principe est le suivant : les années "normales" comptent 365 jours et on ajoute au mois de février un jour supplémentaire pour certaines années dites "bissextiles", qui compteront donc 366 jours. Le but de la manoeuvre étant que les phénomènes astronomiques (équinoxes, saisons ...) tombent aux alentours d'une date régulière dans le calendrier, dans une fourchette pas trop importante. Ce calendrier est découpé en 12 mois inégaux et les jours portent un nom obéissant à un cycle d'ordre 7… ces choix arbitraires posant des problèmes arithmétiques intéressants.

Dans ce qui suit, $(J\,;\,M\,;\,A)$ représente une date dans ce calendrier, avec $A \geq 1583$.

1. Les années bissextiles

Dans le calendrier Grégorien, une année est bissextile lorsqu'elle est multiple de 4 sans l'être de 100, à moins qu'elle ne le soit de 400. Par exemple, 1984, 2004, 1600 et 2000 sont des années bissextiles, alors que 1981, 2007, 1700 et 1900 n'en sont pas. Il s'avère souvent pratique de disposer d'une fonction qui, appliquée à un millésime, associe 1 lorsqu'il correspond à une année bissextile, et 0 sinon. Cette fonction est définie de la façon suivante :

$$\boxed{\mathrm{Biss}(A) = \begin{cases} 1 & \mathrm{si}((A\mathrm{mod}4 = 0)\mathrm{ET}(A\mathrm{mod}100 \neq 0))\mathrm{OU}(A\mathrm{mod}400 = 0) \\ 0 & \mathrm{sinon} \end{cases}} \qquad (1)$$

2. Nombre de jours d'un mois

Le problème posé par le mois de février est traité à part.

Dans le calcul qui suit, on raisonne pour $M \in \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

$$\begin{aligned} M \text{ possède 30 jours} &\Leftrightarrow M \in \{4; 6; 9; 11\} &&\Leftrightarrow 2M \in \{8; 12; 18; 22\} \\ &\Leftrightarrow 2M - 15 \in \{-7; -3; 3; 7\} &&\Leftrightarrow \mathrm{Abs}(2M - 15) \in \{3; 7\} \\ &\Leftrightarrow 5 - \mathrm{Abs}(2M - 15) \in \{-2; 2\} &&\Leftrightarrow \mathrm{Abs}(5 - \mathrm{Abs}(2M - 15)) = 2 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de définir la fonction donnant le nombre de jours du mois d'ordre M dans l'année A :

$$\boxed{\mathrm{NbreJoursMois}(M; A) = \begin{cases} 28 + \mathrm{Biss}(A) & \mathrm{si}\ M = 2 \\ 30 + \mathrm{NonNul}(\mathrm{Abs}(5 - \mathrm{Abs}(2M - 15)) - 2) & \mathrm{sinon} \end{cases}} \qquad (2)$$

Et dans le même élan, une fonction booléenne qui teste la validité d'une date :

$$\boxed{\mathrm{DateValide}(J; M; A) = (A \geq 1583)\mathrm{ET}(1 \leq M \leq 12)\mathrm{ET}(1 \leq J \leq \mathrm{NbreJoursMois}(M, A))} \qquad (3)$$

Retour au sommaire

3. Années et mois modifiés

Le fait que le jour supplémentaire des années bissextiles soit ajouté en plein milieu de l'année complique sensiblement les calculs sur les dates. Nous allons donc opérer un léger décalage pour pallier cet inconvénient et nous arranger pour que nos années ainsi modifiées commencent le 1 mars. Ces années et mois modifiés sont notés A' et M' et sont définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} M \geq 3 & \Rightarrow \quad M' = M - 2 \quad \text{et} \quad A' = A \\ M \leq 2 & \Rightarrow \quad M' = M + 10 \quad \text{et} \quad A' = A - 1 \end{cases}$$

Ainsi, le mois de mars devient le premier et le mois de février le douzième... de l'année précédente. L'intérêt est flagrant pour la manipulation des années bissextiles. Prenons par exemple $A = 2020$. Suivant qu'on se situe dans les deux premiers mois ou dans les suivants, il faut ou pas tenir compte du jour supplémentaire. Alors que lorsqu'on se situe dans l'année modifiée $A' = 2020$, le jour supplémentaire dû au fait que 2020 est bissextile est passé puisque c'est le dernier jour de l'année modifiée $A' = 2019$. Il faut juste garder présent à l'esprit que si A' répond au critère des années bissextiles, c'est $A' - 1$ qui compte 366 jours. Nous noterons les dates modifiées entre double parenthèses: par exemple $(15; 02; 2019) = ((15; 12; 2018))$. Leur calcul sera fait de la façon suivante :

$$\boxed{M' = 1 + ((M + 9)\text{mod}12) \qquad A' = A - 1 + \text{NonNul}(M\text{div}3)} \tag{4}$$

4. Comptage de jours

Bien que les calculs n'aient de sens que depuis 1583, imaginons dans un premier temps, pour simplifier le comptage, que ce calendrier soit en vigueur depuis le 1 mars de l'hypothétique année 0. Nous sommes à la date $(J\,;\,M\,;\,A)$ à 0h. La date modifiée est $((J\,;\,M'\,;\,A'))$ et le 1 mars de l'hypothétique année 0 est donc le $((01; 01; 0000))$. Nous nous placerons toujours à 0h de la date considérée.

4.1 Les années entières depuis le $((\mathbf{01}; \mathbf{01}; \mathbf{0000}))$

Calculons ici le nombre de jours écoulés du $((01; 01; 0000))$ au $((01; 01; A'))$. Sur cette période, il y a A' années entières écoulées, dont les millésimes vont de 0 à $A' - 1$. En comptant 365 jours par année, cela nous fait donc déjà $365 \times A'$ jours écoulés. A cette quantité, il faut bien sûr ajouter autant de fois 1 qu'il y a d'années comportant 366 jours. Or, dans ce système, une année modifiée $K \in \{0; 1; 2; \dots; A' - 1\}$ comporte 366 jours lorsque Biss$(K + 1)$ vaut 1. Il nous faut donc ajouter le nombre de millésimes bissextiles parmi les nombres $\{1; 2; 3; \dots; A' - 1; A'\}$. Il nous suffit d'ajouter le nombre de multiples de 4, en enlevant le nombre de multiples de 100 qui ont été comptés en trop parmi les multiples de 4, puis en ajoutant les multiples de 400 qui n'ont finalement pas été comptabilisés puisque ajoutés avec les multiples de 4 et enlevés avec les multiples de 100. Le nombre de multiples de p dans $\{1; 2; 3; \dots; A' - 1; A'\}$ est $(A'\text{div}p)$. Nous en déduisons que le nombre de jours écoulés du $((01; 01; 0000))$ au $((01; 01; A'))$ est :

$$365 \times A' + (A'\text{div}4) - (A'\text{div}100) + (A'\text{div}400)$$

Retour au sommaire

4.2 Les mois entiers

Ici, nous allons calculer le nombre de jours écoulés du $((01;01;A'))$ au $((01;M';A'))$. N'oublions pas que le mois de mars a le numéro $M'=1$ et février $M'=12$. Si les mois possédaient tous 30 jours, le nombre cherché vaudrait $30\times(M'-1)$. Comparons dans un tableau le nombre cherché à cette quantité :

mois	$\boldsymbol{M'}$	$\boldsymbol{30\times(M'-1)}$	**nombre de jours écoulés au 1 du mois**	**différentiel**
mars	1	0	0	0
avril	2	30	31	+1
mai	3	60	61	+1
juin	4	90	92	+2
juillet	5	120	122	+2
août	6	150	153	+3
septembre	7	180	184	+4
octobre	8	210	214	+4
novembre	9	240	245	+5
décembre	10	270	275	+5
janvier	11	300	306	+6
février	12	330	337	+7

Nous allons chercher une fonction sous la forme

$$f_\alpha :\ x \to \mathrm{E}(\alpha x) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

telle que

$$\forall M' \in \{1;2;3;\ldots;12\},\ f_\alpha(M') = \text{différentiel associé à } M'$$

L'analyse de tous les cas donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
f_\alpha(1)=0 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(\alpha)=0 \Leftrightarrow & 0\le \alpha<1 \Leftrightarrow & \alpha\in[0;1[\\
f_\alpha(2)=1 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(2\alpha)=1 \Leftrightarrow & 1\le 2\alpha<2 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;1[\\
f_\alpha(3)=1 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(3\alpha)=1 \Leftrightarrow & 1\le 3\alpha<2 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/3;2/3[\\
f_\alpha(4)=2 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(4\alpha)=2 \Leftrightarrow & 2\le 4\alpha<3 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;3/4[\\
f_\alpha(5)=2 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(5\alpha)=2 \Leftrightarrow & 2\le 5\alpha<3 \Leftrightarrow & \alpha\in[2/5;3/5[\\
f_\alpha(6)=3 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(6\alpha)=3 \Leftrightarrow & 3\le 6\alpha<4 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;2/3[\\
f_\alpha(7)=4 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(7\alpha)=4 \Leftrightarrow & 4\le 7\alpha<5 \Leftrightarrow & \alpha\in[4/7;5/7[\\
f_\alpha(8)=4 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(8\alpha)=4 \Leftrightarrow & 4\le 8\alpha<5 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;5/8[\\
f_\alpha(9)=5 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(9\alpha)=5 \Leftrightarrow & 5\le 9\alpha<6 \Leftrightarrow & \alpha\in[5/9;2/3[\\
f_\alpha(10)=5 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(10\alpha)=5 \Leftrightarrow & 5\le 10\alpha<6 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;3/5[\\
f_\alpha(11)=6 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(11\alpha)=6 \Leftrightarrow & 6\le 11\alpha<7 \Leftrightarrow & \alpha\in[6/11;7/11[\\
f_\alpha(12)=7 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(12\alpha)=7 \Leftrightarrow & 7\le 12\alpha<8 \Leftrightarrow & \alpha\in[7/12;2/3[
\end{array}$$

Toutes ces conditions sont simultanément réalisées lorsque $\alpha \in [7/12;3/5[$.

Prenons par exemple $\alpha = 0{,}59$. Le nombre de jours écoulés du $((01;01;A'))$ au $((01;M';A'))$ vaut donc :

$$30(M'-1) + \mathrm{E}(0{,}59 \times M')$$

Retour au sommaire

4.3 Dans le mois en cours

Là, c'est simple! Le nombre de jours écoulés du $((01; M'; A'))$ au $((J; M'; A'))$ est $J - 1$.

4.4 Depuis le 1 mars 0000

En ajoutant les résultats précédents, le nombre de jours écoulés du 1 mars 0000 à la date $((J; M'; A'))$ vaut :

$$365 \times A' + (A'\mathrm{div}4) - (A'\mathrm{div}100) + (A'\mathrm{div}400) + 30(M' - 1) + \mathrm{E}(0{,}59 \times M') + J - 1$$

4.5 Depuis le 0 janvier 1901

En astronomie, les données de référence pour le positionnement d'un astre sont souvent données au 0 janvier 1901, autrement dit le 31 décembre 1900, à 0 heure.
Le résultat du paragraphe précédent, lorsqu'il est appliqué à la date $(31; 12; 1900)$ égale à $((31; 10; 1900))$ donne $365 \times 1900 + 765$. En soustrayant cette valeur du résultat général du paragraphe précédent, on obtient le nombre de jours écoulés du 0 janvier 1901 (0h) à la date $(J; M; A)$ (0h) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{N}bre Jours1901(J; M; A) = & 365(A' - 1900) + (A'\mathrm{div}4) - (A'\mathrm{div}100) + (A'\mathrm{div}400) \\ & +30(M' - 1) + \mathrm{E}(0{,}59M') + J - 766 \\ & \\ \text{avec} & A' \text{et } M' \text{définis en } (4) \end{array}} \qquad (5)$$

Notons que ce calcul n'est valable que si $(J; M; A)$ est une date valide au sens de (3) et que si $A \leq 1900$, le résultat est négatif ce qui traduit le fait qu'on remonte dans le temps.

4.6 Le Jour Julien

Le calendrier Julien, mis en place en 46 avant J.C., comptait des années de 365,25 jours (une année bissextile tous les 4 ans) et perdurera jusqu'à l'avènement du calendrier Grégorien. Avant lui, les années comptaient tout simplement 365 jours. Un système de comptage des jours, nommé par extension *Jour Julien*, est initialisé au 1 janvier 4713 avant J.C. à midi. Ce système est adapté au calcul de distance entre deux dates au travers des changements de calendrier. Sachant que le numéro de Jour Julien du 0 janvier 1901 à 12 heures vaut 2 415 385 on en déduit, avec (5) le numéro de Jour Julien de la date $(J; M; A)$ à 12 heures :

$$\boxed{\mathrm{JJ}(J; M; A) = \mathrm{NbreJours1901}(J; M; A) + 2\,415\,385} \qquad (6)$$

Notons que ce calcul n'est valable que si $(J; M; A)$ est une date valide au sens de (3).

4.7 Nom du jour

Qui plus est, des noms sont donnés aux jours selon un cycle d'ordre 7. Le 0 janvier 1901 (alias 31 décembre 1900) était un lundi. Indexons les jours : lundi(0) ; mardi(1) ; mercredi(2) ; jeudi(3) ; vendredi(4) ; samedi(5) et dimanche(6). Le nom du jour (J, M, A) est directement donné par le reste de la division par 7 du nombre de jours écoulés depuis le 0 janvier 1901 (même si celui-ci est négatif).

Retour au sommaire

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{NomJour}(J;M;A) = \mathrm{NbreJours1901}(J;M;A)\mathrm{mod}7\\ \text{la valeur 0 correspondant au lundi}\end{array}} \qquad (7)$$

Déterminons par exemple le nom du jour du 14 juillet 1789. Le calcul donne :

$$\mathrm{NbreJours1901}(14;07;1789) = -40711 = -5816 \times 7 + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{NomJour}(14;07;1789) = 1$$

ce qui correspond à un mardi.

5. Date d'un Jour Julien

On se donne ici un numéro entier N_J de Jour Julien correspondant à une date $(J;M;A)$ à 12 heures. Le but est bien sûr de déterminer cette date. Comme elle doit appartenir au calendrier Grégorien, on supposera que $N_J \geq 2\ 299\ 239$ qui est le numéro de Jour Julien du 1 janvier 1583 à 12 heures. En étendant une fois de plus le calendrier Grégorien dans le passé jusqu'à l'hypothétique date du 1 mars 0000, le jour Julien de cette date à 12 heures aurait été (voir 6) :

$$\mathrm{JJ}(01;03;0000) = -64\ \ 265 + 2\ \ 415\ \ 385 = 1\ \ 721\ \ 120$$

Et donc le nombre de jours écoulés du 1 mars 0000 à la date cherchée est

$$N = N_J - 1\ \ 721\ \ 120$$

(qu'on se place à 0 heure aux deux dates, ou à 12 heures aux deux dates, cela ne modifie rien au calcul).

5.1 L'année modifiée de la date cherchée

En remarquant que, sur une longue période, le temps moyen d'une année du calendrier Grégorien est

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365{,}2425$$

posons $A' = \mathrm{E}\left(\frac{N}{365{,}2425}\right)$ et rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \mathrm{E}(\mathrm{x}) \leq x$

Soit N_1 le nombre de jours écoulés du $((01;01;0000)$ au $((01;01;A'))$.

Nous avons la chaîne d'inégalités et égalités suivante :

$$N_1 \quad = \quad 365 \times A' + \mathrm{E}\left(\frac{A'}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{A'}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{A'}{400}\right)$$

$$N_1 \quad < \quad 365 \times A' + \frac{A'}{4} - \left(\frac{A'}{100} - 1\right) + \frac{A'}{400}$$

$$N_1 \quad < \quad 365{,}2425 \times A' + 1$$

$$N_1 \leq 365{,}2425 \times \frac{N}{365{,}2425} + 1$$

$$N_1 \leq N + 1$$

N_1 et N étant des entiers tels que $N_1 < N + 1$, on en déduit que $N_1 \leq N$.

Retour au sommaire

Soit N_2 le nombre de jours écoulés du $((01;01;0000)$ au $((01;01;A'+1))$.
Nous avons la chaîne d'inégalités et égalités suivante :

$$N_2 \quad = \quad 365\times(A'+1)+\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{4}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{100}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{400}\right)$$
$$N_2 \quad > \quad 365\times(A'+1)+\left(\frac{A'+1}{4}-1\right)-\frac{A'+1}{100}+\left(\frac{A'+1}{400}-1\right)=365{,}2425\times(A'+1)-2$$
$$N_2 \quad > \quad 365{,}2425\times\left(\frac{N}{365{,}2425}-1+1\right)-2=N-2$$

N_2 et N étant des entiers tels que $N_2>N-2$, on en déduit que $N_2\geq N-1$ Finalement, $N_1\leq N\leq N_2+1$. En clair, cela signifie que le jour cherché est dans l'une des années modifiées A' ou $A'+1$. Pour le savoir, il suffira de comparer N à N_2 :

$$\text{Si } N\geq 365(A'+1)+\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{4}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{100}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{400}\right)\text{ Alors Cas}(^*)A'\leftarrow A'+1$$

5.2 Mois modifié de la date cherchée

Si nous sommes dans le cas (*) du paragraphe précédent, les choses sont simples : le mois modifié cherché est $M'=1$ (car $N=N_2$ ou $N=N_2+1$). Plaçons-nous donc dans le cas où $N_1\leq N<N_2$, et depuis le premier jour de l'année dans laquelle on se trouve, il s'est écoulé $N'=(N-N_1)$ jours. Si $N'\geq 337$, on sait (voir 4.2) que $M'=12$.

Raisonnons donc pour $N'<337$, ce qui signifie que $1\leq M'\leq 11$. Au premier jour de M', il s'est écoulé depuis le début de l'année A' : $R_1=30(M'-1)+\mathrm{E}(0{,}59M')$.
Au dernier jour de M', il s'est écoulé depuis le début de l'année A': $R_2=30M'+\mathrm{E}\big(0{,}59(M'+1)\big)-1$. Nous devons donc avoir les inégalités suivantes :

$$30(M'-1)+0{,}59M'-1<R_1\leq N'\leq R_2<30M'+0{,}59(M'+1)-1$$

L'inégalité de droite est stricte car $0{,}59(M'+1)$ n'est jamais un entier. Cela nous donne $30{,}59M'-31<N'<30{,}59M'-0{,}41$ ce qui conduit à $\frac{N'+0{,}41}{30{,}59}<M'<\frac{N'+31}{30{,}59}$.
En remarquant que l'amplitude de cet encadrement vaut exactement 1, on en déduit que $M'=\mathrm{E}\left(\frac{N'+31}{30{,}59}\right)$. Si on analyse le cas où $N'\geq 337$, et donc $337\leq N'\leq 366$, on constate que $\frac{337+31}{30{,}59}\approx 12{,}03$ et que $\frac{366+31}{30{,}59}\approx 12{,}98$, et donc la formule précédente fonctionne encore dans ce cas en donnant bien $M'=12$.
Le quantième du jour dans le mois est ensuite déterminé aisément : $J=N'-R_1+1$.

5.3 Le retour à la date réelle

On vérifiera aisément que les formules établies en (4) se retournent pour donner :

$$M=1+((M'+1)\mathrm{mod}12) \qquad \text{et} \qquad A=A'+(M'\mathrm{div}11)$$

Retour au sommaire

5.4 Bilan

A défaut de pouvoir fournir une fonction donnant la date (à 12 heures) du calendrier Grégorien du jour Julien N_J, avec N_J entier et $N_J \geq 2\ 299\ 239$, voici un morceau de programme donnant le résultat :

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
N \leftarrow N_J - 1\ 721\ 120 \\
A' \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{N}{365{,}2425}\right) \\
N_1 = 365A' + \mathrm{E}\left(\frac{A'}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{A'}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{A'}{400}\right) \\
N_2 = 365(A'+1) + \mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{400}\right) \\
\mathrm{Si} N \quad N_2 \mathrm{Alors} \\
\quad A' \leftarrow A' + 1 \\
\quad M' \leftarrow 1 \\
\quad J \leftarrow N - N_2 + 1 \\
\mathrm{Sinon} \\
\quad M' \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{N - N_1 + 31}{30{,}59}\right) \\
\quad J \leftarrow N - N_1 - 30(M'-1) - \mathrm{E}(0{,}59M') + 1 \\
\mathrm{FinSi} \\
M \leftarrow 1 + ((M'+1) \mathrm{mod} 12) \\
A \leftarrow A' + (M' \mathrm{div} 11) \\
\mathrm{Retourner}(J; M; A) \\
\hline
\end{array}
\tag{8}
$$

MATHS ET VIE COURANTE

AH, LA BELLE ÉTOILE !

On vient de loin pour montrer de la géométrie dans la vallée de la Meuse. Le camion est reparti, son chauffeur n'a pas eu le temps de prendre connaissance du sophisme présenté dans le [Petit Vert n°126] et sa solution mise dans le [Petit Vert n°127].

Retour au sommaire