Python

```
def niemeChiffre(n):
""" Fonction niemeChiffre(n : entier ; ch[n-1],i : entiers)
n : emplacement du chiffre cherché dans la liste 123456789…
ch : chaîne de caractères, formée de la liste 123456789…
renvoie ch[n-1] et i, le n-ième chiffre de la liste et le nombre auquel il appartient
"""
ch=""
i=0
while len(ch)<n:
i=i+1
ch=ch+str(i)
return ch[n-1],i
```

PROBLÈME

LE PROBLÈME DU TRIMESTRE - N°141

proposé par Philippe Févotte

1- Déterminer les valeurs du paramètre réel positif a telles que l'équation

(E_1): $x^3+\frac{1}{x^3}=a$ ait des racines réelles.

2- Montrer alors que l'équation (E_2): $x^3-3x-a=0$ a une unique solution notée γ et que $\gamma\geq 2$.

3- x étant solution de (E_1) calculer $x^4+\frac{1}{x^4}$ en fonction de γ.

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte. Vous pouvez lui envoyer vos solutions à ce problème. **Des réponses, même partielles, seraient les bienvenues**, ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT - N°140

N'ayant pas eu de réponse au problème posé je vous propose deux solutions, celle de l'auteur et la mienne.

En notant $u_{n,k}$ le nombre de ces suites de n chiffres commençant par k avec k prenant pour valeurs 1, 2, 3 ou 4, on a $u_n=u_{n,1}+u_{n,2}+u_{n,3}+u_{n,4}$.

On a naturellement

$u_1=4$, les suites étant 1, 2, 3, 4.

$u_2=6$, les suites étant 12, 21, 23, 32, 34, 43

Retour au sommaire

En poursuivant, on obtient $u_3 = 10$, $u_4 = 16$, $u_5 = 26$, … ce qui à un coefficient 2 près, rappelle les termes 2, 3, 5, 8, 13 de la suite de Fibonacci. Si on note f_n la suite de Fibonacci ayant pour premiers termes $f_1 = 1$ et $f_2 = 1$, on va montrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = 2f_{n+2}$; il suffit pour cela de montrer que pour tout entier n , $U_n + U_{n+1} = U_{n+2}$

La solution matricielle proposée par Jacques Choné

La construction des suites permet d'écrire

$u_{n+1,1} = u_{n,2}$

$u_{n+1,2} = u_{n,1} + u_{n,3}$

$u_{n+1,3} = u_{n,2} + u_{n,4}$

$u_{n+1,4} = u_{n,3}$

En notant $U_n = \begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \\ u_{n,3} \\ u_{n,4} \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour $n \geq 2$, $U_n = MU_{n-1}$

On en déduit que $U_n = M^{n-1}U_1$ et par conséquent $u_n = {}^tU_1 U_n = {}^tU_1 M^{n-1} U_1$

On vérifie facilement que $(I_4 + M - M^2)U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on en déduit que

$U_n + U_{n+1} - U_{n+2} = {}^tU_1 M^{n-1}(I_4 + M - M^2)U_1 = 0$, ce qu'il fallait montrer.

Une remarque pour conclure cette première proposition. À partir de $U_n = M^{n-1}U_1$, la diagonalisation de la matrice symétrique M permet de déterminer l'expression explicite de la suite u_n et de reconnaitre au facteur 2 près les termes de la suite de Fibonacci.

La solution directe que je propose

Par construction des suites, on a :

$u_{n+2,1} = u_{n+1,2} = u_{n,1} + u_{n,3}$

$u_{n+2,2} = u_{n+1,1} + u_{n+1,3} = u_{n,2} + u_{n,2} + u_{n,4}$

$u_{n+2,3} = u_{n+1,2} + u_{n+1,4} = u_{n,1} + u_{n,3} + u_{n,3}$

$u_{n+2,4} = u_{n+1,3} = u_{n,2} + u_{n,4}$

Par sommation et en organisant les termes :

$u_{n+2} = u_{n,1} + u_{n,2} + u_{n,3} + u_{n,4} + \quad u_{n,3} + \quad (u_{n,2} + u_{n,4}) + \quad (u_{n,1} + u_{n,3}) + \quad u_{n,2}$

$u_{n+2} = \quad u_n \quad + u_{n+1,4} \quad + \quad u_{n+1,3} \quad + u_{n+1,2} \quad + u_{n+1,1}$

$u_{n+2} = \quad u_n \quad + u_{n+1}$

Ce qu'il fallait démontrer.

Retour au sommaire