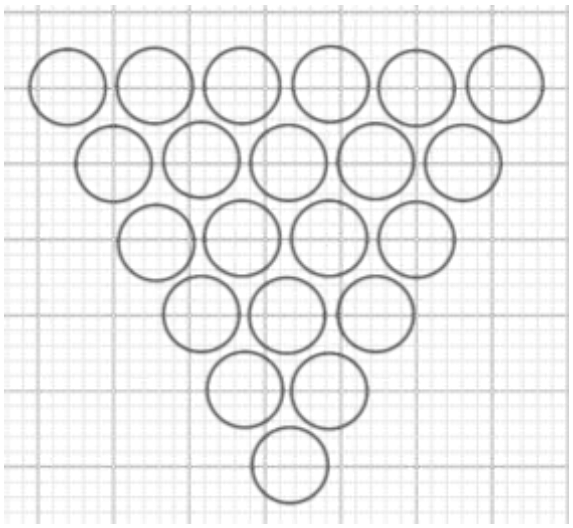
ÉTUDE MATHÉMATIQUE

SOMME DES CARRÉS[1]

Walter Nurdin

Il est habituel de démontrer la formule qui permet de calculer la somme des carrés des n premiers entiers par récurrence. On vous présente ici une méthode moins courante qui utilise le centre d'inertie d'un système.

Le triangle du système est équilatéral. Les boules ont la même masse unité. Pour des raisons de symétrie le centre de gravité du triangle est le même que le centre d'inertie du système formé par les boules.



Il y a une boule dont l'ordonnée est 1, deux boules dont l'ordonnée est 2, …, $\boldsymbol{n}$ boules dont l'ordonnée est $\boldsymbol{n}$.

Notons $\bar{y}$ l'ordonnée du centre d'inertie du système. Le centre de gravité est situé au $\frac{2}{3}$ des médianes auquel il faut ajouter 1 puisque le sommet du triangle a pour ordonnée 1 donc :

$$\bar{y} = \frac{2}{3}(n-1)+1$$

De plus toutes les forces sont en équilibre lorsqu'on concentre la masse sur le centre de gravité. Ainsi on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i - \bar{y}) = 0$$

Les m_i étant les masses des boules concentrées au point d'ordonnée y_i ainsi $m_4 = 4$.
En développant cette somme on obtient :

$$1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 + \cdots n\times n - \bar{y}\sum_{i=1}^{i=n} m_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \left(\frac{2}{3}(n-1)+1\right) n\frac{n+1}{2}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = n(n+1)\frac{2n+1}{6}}$$

[1] Inspiré du livre « Surprenantes images des mathématiques » de Georg Glaeser et Konrad Polthier. Belin:Pour la science.

Retour au sommaire