LE PROBLÈME DU TRIMESTRE - N°140

D'après un problème proposé par Jacques Choné

On note, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_n le nombre de suites de n chiffres telles que la différence entre deux chiffres consécutifs soit d'une unité, et utilisant uniquement les chiffres 1, 2, 3 ou 4.
Par exemple pour $n = 10$ les suites 1234323434 ou 4321232343
Déterminer une relation de récurrence définissant la suite (u_n).
Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte. Vous pouvez lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT - N°139

Solution proposée par Philippe Févotte

Pour un entier i compris entre 2 et $n-1$, les listes qui constituent un record à l'instant i peuvent être construites de la façon suivante :

- on choisit i entiers entre 1 et n,
- on place le plus grand des nombres choisis au rang i,
- on permute les $i-1$ autres nombres dans les $i-1$ premières places,
- on permute les $n-i$ entiers non choisis dans les $n-i$ places restantes.

Sur les $n\,!$ listes possibles, le nombre de listes favorables est donc $\binom{n}{i}(i-1)\,!\,(n-i)\,!$.
Par conséquent la probabilité p_i d'obtenir un record à l'instant i est $\binom{n}{i}\frac{(i-1)!(n-i)!}{n!}$, ce qui après simplification donne $p_i = \frac{1}{i}$.
Par ailleurs pour obtenir un record au rang n, il faut et il suffit de placer le jeton numéroté n en dernière position. On a donc $p_n = \frac{1}{n}$. De plus, par convention, on sait que $p_1 = 1$.
On en conclut que pour tout entier i inférieur ou égal à n, $p_i = \frac{1}{i}$.
Pour déterminer l'espérance de X_n, sans connaître la loi de probabilité de cette variable aléatoire, on va décomposer la variable « compteur » X_n comme somme de variables « indicatrices » dont on connaît l'espérance.
En effet, si on note R_i la variable qui prend la valeur 1 s'il y a un record au rang i et 0 sinon, on a $X_n = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$.
Chaque variable R_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \frac{1}{i}$; elle a pour espérance $\frac{1}{i}$.
On en déduit que $E(X_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Retour au sommaire