

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

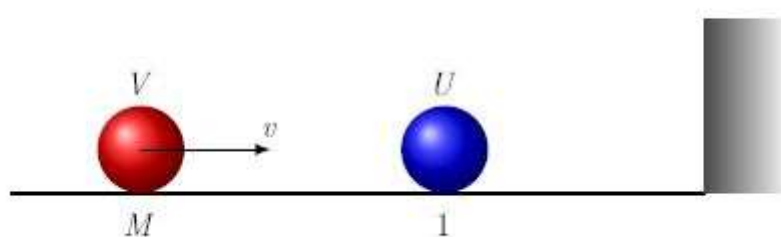
DES CHOCS À π

Alain Satabin

1. DES BOULES, DES CHOCS ET DES REBONDS

Imaginons l'expérience suivante :

Sur le sol, à gauche d'un mur, est positionnée une boule immobile U de masse 1, tandis qu'une boule V de même diamètre et de masse M arrivant de sa gauche à une vitesse v vient la percuter.



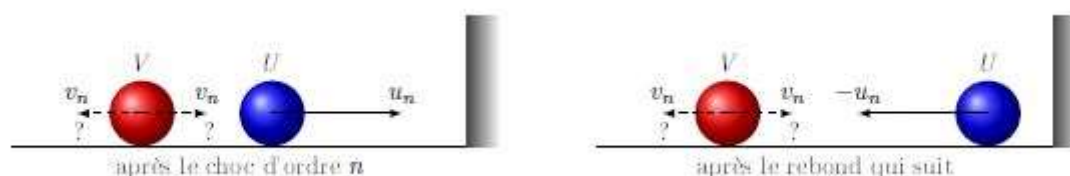
Dans la suite de l'article, ce qu'on appelle un *contact* est : soit un *choc*, percussion entre les deux boules, soit un *rebond* de la boule U sur le mur. L'expérience se termine lorsqu'il ne se produit plus de chocs et le jeu consiste à savoir combien de contacts ont eu lieu.

Le système est évidemment considéré comme parfait : pas de frottement, des chocs élastiques et aucune perte d'énergie lors des rebonds. D'un point de vue physique, l'expérience est irréalisable pour cette raison !

La chose amusante est que lorsque $M = 1$ on dénombre 3 contacts, passant à 31 contacts pour $M = 100$, puis 314 pour $M = 10000$ et pour $M = 1000000$, à votre avis ? Oui, c'est bien cela 3141 contacts. Il est difficile de croire au hasard et la question se pose de savoir si l'égrenage des décimales de π va se poursuivre à mesure que M gravit les puissances de 100.

2. MATHÉMATISONS PHYSIQUEMENT LE PROBLÈME

Orientons l'axe de déplacement des boules vers la droite. Au départ, les vitesses des boules sont $u_0 = 0$ et $v_0 = v$. Un premier choc se produit et la boule U va partir vers la droite à la rencontre du mur. Avant de comptabiliser les contacts, intéressons-nous simplement aux chocs. Supposons qu'il s'en soit déjà produit n plaçons-nous après ce $n^{\text{ième}}$ choc (avec $n \geq 1$) dans le cas où il envoie la boule U vers le mur. Notons u_n et v_n les vitesses des deux boules après ce choc. Nous avons ici $u_n > 0$, sans avoir d'indication sur le signe de v_n . La boule U va donc rebondir sur le mur et en revient avec la vitesse $-u_n$ vers la boule V .



Si le choc suivant a bien lieu, en vertu des conservations de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement du système, les vitesses u_{n+1} et v_{n+1} qui en résultent vérifient le système :

[Retour au sommaire](#)

$$\begin{cases} u_{n+1}^2 + M v_{n+1}^2 = u_n^2 + M v_n^2 \\ u_{n+1} + M v_{n+1} = -u_n + M v_n \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} u_{n+1}^2 - u_n^2 = M (v_n^2 - v_{n+1}^2) \\ u_{n+1} + u_n = M (v_n - v_{n+1}) \end{cases}$$

en remarquant que $v_{n+1} - v_n \neq 0$ car un choc s'est produit (et donc $u_{n+1} + u_n \neq 0$), une basique identité remarquable permet de simplifier pour donner :

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = v_n + v_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n = M (v_n - v_{n+1}) \end{cases}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} u_{n+1} - v_{n+1} = u_n + v_n \\ u_{n+1} + M v_{n+1} = -u_n + M v_n \end{cases}$$

ce qui conduit finalement à :

$$(S) : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{M+1} ((M-1) u_n + 2M v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{M+1} (-2 u_n + (M-1) v_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

3. JUSQU'OU S'ARRÊTERONT-ELLES ?¹

En supposant que le $n^{\text{ième}}$ choc se produit, ce sera le dernier dans l'un des deux cas suivants :

- soit la boule U va rebondir sur le mur ($u_n > 0$) mais elle ne rattrape pas la boule V qui fuit vers la gauche quand elle revient. Cela correspond à l'inégalité $v_n \leq -u_n$;

- soit $u_n \leq 0$, ce qui signifie que U s'immobilise ou s'éloigne du mur aussitôt le choc. Nécessairement dans ce cas la boule V s'éloigne aussi du mur plus vite que U et donc $v_n \leq u_n \leq 0$ et a fortiori $v_n \leq -u_n$.

Pour faire simple, disons que l'expérience se poursuit tant que $v_n > -u_n$, c'est-à-dire $u_n + v_n > 0$.

4. DEMANDEZ LE PROGRAMME !

Avant d'aller plus loin, on peut tester le nombre de contacts obtenus grâce à l'algorithme suivant :

```
p ← saisir ("Puissance de 100 voulue pour M :")
m ← 100P "masse de la boule V"
u ← 0 "initialisation de la suite u"
v ← 1 "initialisation de la suite v"
n ← 0 "initialisation du nombre de contacts"
tant que (u+v>0)
  n ← n+1 "comptabiliser le choc de rang n"
  "calcul des vitesses après le choc de rang n"
  uu ← ((m-1)u+2mv)/(m+1)
  vv ← (-2u+(m-1)v)/(m+1)
  u ← uu
  v ← vv
  "voir si le choc est suivi d'un rebond"
  si u>0 "U retourne vers le mur"
    n ← n+1 "comptabiliser le rebond"
  fin si
fin tant que
"conclusion"
afficher ("le nombre de contacts effectués vaut : ", n)
```

¹ « Jusqu'ou s'arrêteront-ils ? » extrait de la chanson « Revue de Presse » de Coluche

5. MAIS POURQUOI π S'INVITE ?

Pour exprimer sous forme explicite u_n et v_n à partir des relations (S), la méthode matricielle fonctionne bien, quoiqu'un peu lourde. Proposons autre chose.

Une astuce consiste à passer par les complexes en posant $z_n = u_n + i \sqrt{M} v_n$.

Les relations trouvées précédemment donnent alors :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= u_{n+1} + i \sqrt{M} v_{n+1} \\ &= \frac{1}{M+1} \left([(M-1) - 2i\sqrt{M}] u_n + [2M + i\sqrt{M}(M-1)] v_n \right) \\ &= \frac{1}{M+1} \left([(M-1) - 2i\sqrt{M}] u_n + i\sqrt{M} [-2i\sqrt{M} + (M-1)] v_n \right) \\ &= \frac{(M-1) - 2i\sqrt{M}}{M+1} (u_n + i\sqrt{M} v_n) \\ &= \left(\frac{\sqrt{M}-i}{\sqrt{M}+1} \right)^2 z_n \\ &= e^{-2i\mu} z_n \end{aligned}$$

en posant $\mu = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$.

Cela conduit à : $z_n = e^{-2in\mu} z_0 = i v \sqrt{M} e^{-2in\mu} = u_n + i \sqrt{M} v_n$ et donc, pour $n \geq 1$:

$$\begin{cases} u_n = v \sqrt{M} \sin(2n\mu) \\ v_n = v \cos(2n\mu) \end{cases}$$

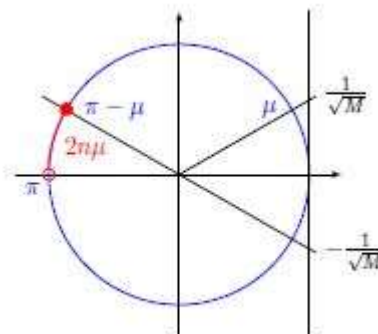
L'arrêt de l'expérience étant une affaire de signe et de comparaison des deux vitesses, la valeur de v n'a pas beaucoup d'importance.

Le premier cas finalisant se produit lorsque $v_n \leq -u_n < 0$. Il n'y aura plus de choc ensuite, le $n^{\text{ième}}$ est le dernier et chaque choc a été suivi d'un rebond. Dans ce cas on dénombre donc $2n$ contacts. Ces inégalités se traduisent par le système :

$$\begin{cases} u_n > 0 \\ v_n < 0 \\ \frac{u_n}{v_n} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2n\mu) > 0 \\ \cos(2n\mu) < 0 \\ \tan(2n\mu) \geq -\frac{1}{\sqrt{M}} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\frac{\pi}{\mu} - 1 \leq 2n < \frac{\pi}{\mu}$$



L'égalité de gauche signifierait que $\frac{\pi}{2n+1} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$

Comme nous allons considérer les cas où $M = 10^{2p}$ on aurait

alors $\tan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) = 10^{-p}$. Cela n'est jamais réalisé et nous

démontrerons en annexe à la fin de l'article que, pour $m \geq 3$ (et entier), $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ n'est rationnelle que lorsqu'elle vaut 1 pour $m = 4$.

Dans ce premier cas d'arrêt de l'expérience, le nombre de contacts est donc $2n = E\left(\frac{\pi}{\mu}\right)$.

Passons au second cas.

Le $n^{\text{ième}}$ choc se produit mais à son issue $u_n \leq 0$ (et fatalement $v_n \leq 0$). Tenons compte aussi du fait que le choc précédent avait conduit à un rebond ($u_{n-1} > 0$) suivi d'un choc, donc qu'il n'était pas dans le cas précédent. Il y a eu n chocs et $n - 1$ rebonds, donc $2n - 1$ contacts.

Cela signifie que $2(n-1)\mu$ est situé dans le premier ou deuxième quadrant, mais pas dans la zone rouge dessinée dans le cas précédent, et que $2n\mu$ est dans le troisième quadrant.

C'est à dire $\begin{cases} 2(n-1)\mu < \pi - \mu \\ 2n\mu \geq \pi \end{cases}$ ou encore $\frac{\pi}{\mu} - 1 \leq 2n - 1 < \frac{\pi}{\mu}$ L'égalité de gauche conduit cette fois à $\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 10^{-p}$ et n'est réalisée que pour $p = 0$, c'est à dire lorsque les deux boules ont la même masse. Nous avons alors $n = 2$ et 3 contacts. La boule U s'immobilise après le deuxième choc.

Pour $p \geq 1$, ce cas conduit aussi à un nombre de contacts valant $2n - 1 = E\left(\frac{\pi}{\mu}\right)$.

D'où la conclusion générale :

Lorsque la boule V a pour masse $M = 10^{2p}$ avec $p \in \mathbb{N}$, nous avons

- $E(\pi) = 3$ contacts si $p = 0$
- $E\left(\frac{\pi}{\arctan(10^{-p})}\right)$ contacts si $p \geq 1$

Pour $p \geq 1$, un petit développement limité donne

$$\arctan(10^{-p}) = 10^{-p} - \frac{1}{3} 10^{-3p} + 10^{-4p} \varepsilon(p) \quad \text{avec} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \varepsilon(p) = 0$$

et donc (dans ce qui suit ε représente **une** fonction tendant vers 0 à l'infini)

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\arctan(10^{-p})} &= \frac{\pi}{10^{-p} \left(1 - \frac{1}{3} 10^{-2p} + 10^{-3p} \varepsilon(p)\right)} \\ &= \pi 10^p \left(1 + \frac{1}{3} 10^{-2p} + 10^{-3p} \varepsilon(p)\right) \\ &= \pi 10^p + \frac{\pi}{3} 10^{-p} + 10^{-2p} \varepsilon(p) \end{aligned}$$

Cela signifie que $\pi \times 10^p$ est une approximation satisfaisante de cette fraction, l'erreur commise étant de l'ordre de 10^{-p} et ayant peu de chance de modifier la valeur de la partie entière dès que p dépasse 5. Pour les premières valeurs de p , l'algorithme permet de constater que cette expression convient également.

L'apparition des décimales de π n'est donc pas un hasard et le nombre de contacts vaut $E(\pi \times 10^p)$ lorsque la boule incidente a pour masse 10^{2p} . Seule une séquence de p chiffres 9 à partir du rang $p + 1$ dans le développement décimal de π peut invalider cette valeur sur un cas particulier.

6. ANNEXE ANNONCÉE

Montrons ici que pour $m \geq 3$ (et entier), $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ n'est rationnelle que lorsqu'elle vaut 1 pour $m = 4$.

6.1. Cas où m est un nombre premier

Comme $m \geq 3$, il est premier impair. Posons $m = 2q + 1$.

$$t = \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{e^{2i\pi/m} - 1}{i(e^{2i\pi/m} + 1)} \Rightarrow e^{2i\pi/m} = \frac{1+it}{1-it} \Rightarrow \left(\frac{1+it}{1-it}\right)^m = 1$$

t est donc une racine du polynôme

$$P(X) = (1 + iX)^m - (1 - iX)^m = (iX + 1)^m + (iX - 1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (iX)^k (1 + (-1)^{m-k})$$

ne subsistent dans cette somme que les termes où $m - k$ est pair, c'est-à-dire k impair ($k = 2j + 1$)

$$P(X) = \sum_{j=0}^{q} 2 \binom{2q+1}{2j+1} (iX)^{2j+1} = 2iX \sum_{j=0}^{q} \binom{2q+1}{2j+1} (-1)^j X^{2j}$$

et comme $t = \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) \neq 0$, t est une racine (positive) du polynôme à coefficients entiers

$$Q(X) = \sum_{j=0}^{q} \binom{2q+1}{2j+1} (-1)^j X^{2j}$$

Or, si le rationnel positif irréductible $\frac{a}{b}$ est racine de ce polynôme, alors a divise son coefficient constant, c'est à dire m , et b divise le coefficient dominant, c'est à dire $(-1)^q$. Cela signifie que a vaut 1 ou m (car m est premier) et que b vaut 1. Donc : soit $t = 1$, ce qui est incompatible avec m impair (donc différent de 4), soit $t = m$, ce qui est également impossible car $m \geq 3$ et $t = \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) \leq \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) < 3$.

Voici démontré que $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ est irrationnelle lorsque m est un nombre premier impair.

6.2. Le cas $m = 8$

Posons $t = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2t}{1-t^2}$$

donc t est racine du trinôme $X^2 + 2X - 1$ qui n'a pas de racine rationnelle. Le cas $m = 8$ est également démontré.

6.3 Une propriété sympathique

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $kx \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Il existe une fraction rationnelle F_k à coefficients entiers telle que $\tan(kx) = F_k(\tan(x))$. Cela se démontre aisément par récurrence avec la formule d'addition des tangentes et on a

$$F_1(X) = X \quad \text{et} \quad F_{j+1}(X) = \frac{F_j(X) + X}{1 - XF_j(X)}$$

6.4 Le cas général

Si m est une puissance de 2 autre que 4, alors $m = 8k$ et

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(k \times \frac{\pi}{8k}\right) = F_k\left(\tan\left(\frac{\pi}{8k}\right)\right) = F_k\left(\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)$$

donc si $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ était rationnelle, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ le serait aussi, réfutant le résultat (6.2). Si m n'est pas une puissance de 2, alors m possède un diviseur premier impair p et $m = kp$

$$\tan\left(\frac{\pi}{p}\right) = \tan\left(k \times \frac{\pi}{kp}\right) = F_k\left(\tan\left(\frac{\pi}{kp}\right)\right) = F_k\left(\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)$$

donc si $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ était rationnelle, $\tan\left(\frac{\pi}{p}\right)$ le serait aussi, réfutant le résultat (6.1). Ce qui clôt la démonstration de la propriété annexée.