LE PROBLÈME DU TRIMESTRE (N°137)

D'après un problème proposé par Jacques Choné

On se donne un nombre entier n.

Deux joueurs lancent chacun à leur tour une pièce équilibrée. Le joueur 1 lance en premier la pièce, puis le joueur 2, etc. et on finit par le joueur 1. Ainsi le joueur 1 lance la pièce une fois de plus que le joueur 2.

On note X le nombre de « Pile » obtenus par le joueur 1 au bout de ses $n+1$ lancers et Y le nombre de « Pile » obtenus par le joueur 2 au bout de ses n lancers.

1. Déterminez la probabilité $P(X > Y)$.
2. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\sum_{l=k+1}^{n+1}\binom{n+1}{l}\right)$$

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte. (philippe.fevotte@wanadoo.fr). Vous pouvez lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT (N°136)

La solution proposée par l'auteur :

Montrons qu'une condition nécessaire pour que ce soit possible est que le degré de *P* soit pair.

Supposons que le degré de *P* soit impair. Il aurait alors une racine réelle u_0 ; on en déduit que $P(u_0^2 + u_0 + 1) = 0$ donc que $u_1 = u_0^2 + u_0 + 1$ est aussi racine de *P* puis par une récurrence simple que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et vérifiant pour tout *n :* $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ sont racines de *P.* Or cette suite est strictement croissante *;* ainsi *P* aurait une infinité de racines, ce qui est impossible. D'où le résultat.

Remarques :

- un exemple de polynôme de degré 2 qui satisfait à la condition est $X^2 + 1$;
- un exemple de polynôme de degré 1 qui satisfait la condition dans $\mathbb{C}[X]$ est $X + i$ car

$$X^2 + X + 1 + i = (X + i)(X + 1 - i).$$

Retour au sommaire