

# L'INVERSION GÉOMÉTRIQUE

Alain Satabin

## I. Présentation de la chose

### Sa définition

Soit  $O$  un point du plan et  $k$  un réel positif.

L'inversion  $F$  de pôle  $O$  et de rapport  $k^2$  est la transformation du plan associée à la fonction complexe :

$$z \rightarrow \frac{k^2}{\bar{z}} \quad \text{ou encore} \quad z \rightarrow \frac{k^2 z}{|z|^2}$$

Pour  $M$  un point du plan différent de  $O$ , on notera  $M'$  son image par  $f$ .

### Quelques remarques immédiates

- i.  $O$  n'a pas d'image (le pauvre !)
- ii. les points  $O, M, M'$  sont alignés et  $O \notin [MM']$  (regardez les arguments !)
- iii.  $OM \times OM' = k^2$  ;
- iv. le cercle  $\Gamma$  de centre  $O$  et de rayon  $k$  est invariant point par point (appelé *cercle d'inversion*) ;
- v. cette transformation est involutive :  $F \circ F = Id_{\text{plan}}$  ;
- vi. lorsque  $M$  se rapproche de  $O$ , le point  $M'$  dégage vers un infini, et réciproquement ;
- vii. l'inversion commute avec toute rotation de centre  $O$  :  $f(z \cdot e^{i\alpha}) = e^{i\alpha} \cdot f(z)$  .

## II. Images de base

### 1. Image d'une droite passant par $O$

Considérons la droite  $\mathcal{D}^* = (0; u^*) \setminus \{O\}$  passant par  $O$  et dirigée par le vecteur unitaire  $u^*$  mais privée de  $O$ .

La définition montre sans trop de difficulté que le point  $M$  d'abscisse  $\lambda$  sur cette droite est transformé en le point d'abscisse  $\frac{k^2}{\lambda}$  de cette même droite.

Cela adjoint au fait que  $\frac{k^2}{\lambda}$  décrit  $\mathbb{R}^*$  lorsque  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}^*$ , on déduit que  $\mathcal{D}^*$  est globalement invariante.

### 2. Image d'une droite ne passant pas par $O$

En vertu de la remarque <I.2.vii>, il nous suffit d'analyser le cas d'une droite verticale  $\mathcal{D}: x = \lambda$ , ce qui correspond à l'équation complexe polaire :

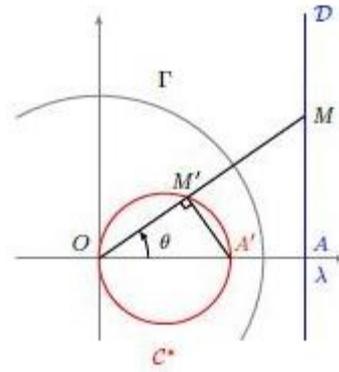
$$z = \frac{\lambda}{\cos(\theta)} \cdot e^{i\theta} \quad \theta \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

Notons  $M(z)$ ,  $A(\lambda)$ ,  $M' = F(M)$  et  $A' = F(A)$ .

Nous avons donc :

$$M' \left( \frac{k^2}{\lambda} \cdot \cos(\theta) \cdot e^{i\theta} \right) \quad A' \left( \frac{k^2}{\lambda} \right)$$

Cela permet de voir que  $M'$  est le projeté de  $A'$  sur la demi-droite  $[OM)$ , et que lorsque  $M$  décrit la droite  $\mathcal{D}$ , le point  $M'$  décrit le cercle  $\mathcal{C}^*$  de diamètre  $[OA']$ , privé de  $O$ .



### 3. Image d'un cercle passant par $O$

La section précédente ajoutée au fait que l'inversion est involutive nous permet de déduire que l'image d'un cercle de centre  $\Omega$ , passant par  $O$  et privé de  $O$ , est une droite ne passant pas par  $O$ , perpendiculaire à la droite  $(O, \Omega)$ .

### 4. Image d'un cercle ne passant pas par $O$

Considérons l'inversion de pôle  $O$  et de rapport 1 et le cercle  $\mathcal{C}$  de centre d'affixe  $\omega \in \mathbb{R}^+$  et de rayon  $r \neq \omega$ .

$$M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (z - \omega) \times \overline{(z - \omega)} = r^2 \Leftrightarrow z \bar{z} - \omega(z + \bar{z}) = r^2 - \omega^2$$

En divisant tout par  $z \bar{z}$  (non nul car  $O \notin \mathcal{C}$ ), on obtient :

$$M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 - \omega \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) = \frac{r^2 - \omega^2}{z \bar{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\bar{z}} - \frac{\omega}{\omega^2 - r^2} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) = \frac{1}{r^2 - \omega^2}$$

Avec  $M' = F(M)$  d'affixe  $z' = \frac{1}{\bar{z}}$  :

$$M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow z' \bar{z}' - \frac{\omega}{\omega^2 - r^2} (z' + \bar{z}') = \left( \frac{r}{\omega^2 - r^2} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\omega^2 - r^2} \right)^2$$

Ce qui signifie que le point  $M'$  est sur le cercle  $\mathcal{C}'$  de centre d'affixe  $\frac{\omega}{\omega^2 - r^2}$  et de rayon  $\frac{r}{|\omega^2 - r^2|}$ .

En considérant la droite  $(OM)$ , globalement invariante, lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{C}$ , il paraît clair que tout le cercle  $\mathcal{C}'$  est parcouru.

En remarquant que l'involution de rapport  $k^2$  n'est jamais que la composée de celle de rapport 1 et de l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k^2$ , et en se servant de (I.2.vii), on peut déduire que l'image d'un cercle ne passant pas par  $O$  est un cercle ne passant pas par le point  $O$ .

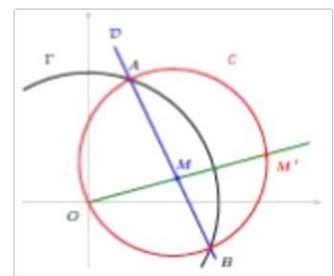
### 5. Construction de l'image d'un point

Considérons un point  $M$  différent de  $O$  et pas situé sur  $\Gamma$  (sinon il est invariant !).

Son image  $M'$  est situé sur la demi-droite  $[OM)$ .

Considérons une droite  $\mathcal{D}$  passant par  $M$ , ne passant pas par  $O$ , et coupant  $\Gamma$  en 2 points  $A$  et  $B$ . Elle est transformée en un cercle passant par  $O$ , privé de  $O$ , et passant également par  $A$  et  $B$  puisque ces points sont invariants.

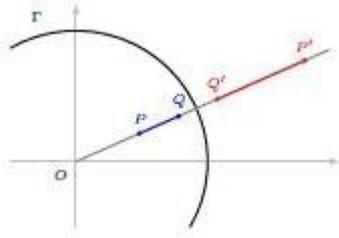
L'image de  $\mathcal{D}$  est donc le cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $(OAB)$ .



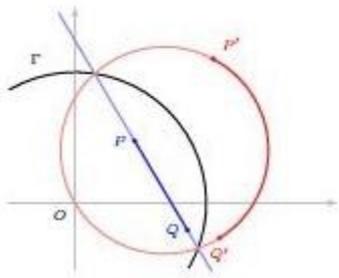
L'image de  $M$  est donc l'intersection différente de  $O$  de ce cercle avec la droite  $(OM)$ .

### 6. Image d'un segment

Pour transformer le segment  $[PQ]$  ne contenant pas  $O$  et en notant  $P' = F(P)$  et  $Q' = F(Q)$ , deux cas peuvent se présenter :



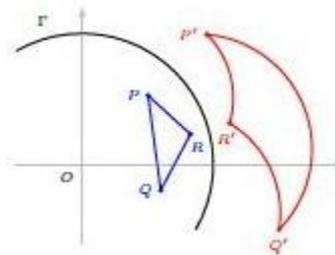
Si  $O \in (PQ)$  alors l'image du segment  $[PQ]$  est tout simplement le segment  $[P'Q']$ .



Si  $O \notin (PQ)$ , alors l'image du segment  $[PQ]$  est alors l'arc  $[\widehat{P'Q'}]$  ne contenant pas  $O$  du cercle circonscrit au triangle  $(OP'Q)$ .

### 7. Image d'un triangle

Dans le cas où aucun des côtés prolongés ne passe par  $O$ , l'image d'un triangle est l'assemblage de trois arcs de cercles.



### 8. Tracé de l'image d'un cercle

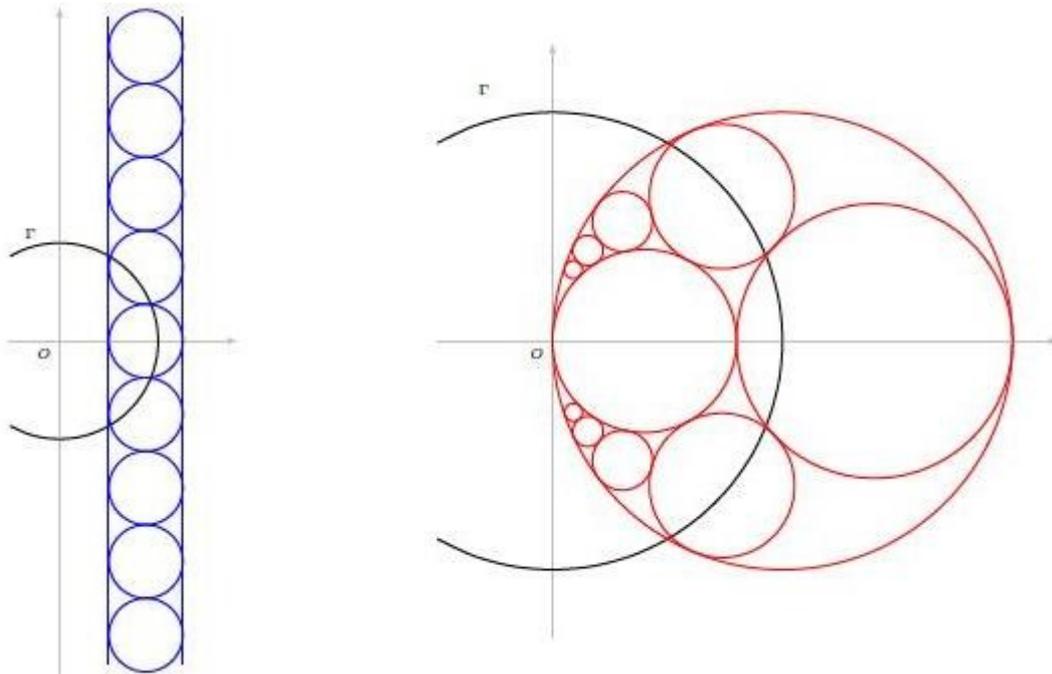
Si le cercle passe par  $O$ , il suffit de transformer deux points  $P$  et  $Q$  et l'image sera la droite  $(PQ)$ .

Si le cercle ne passe pas par  $O$ , il suffit de transformer trois points et de tracer le cercle circonscrit aux trois images.

### 9. De jolis dessins !

L'inversion étant bijective (I.2.v), elle conserve le nombre de points d'intersection et la tangence des figures.

Dans la figure ci-dessous, on transforme un faisceau de cercles tangents à deux parallèles (figure de gauche). Les deux droites sont transformées en deux cercles passant par  $O$  (privés de  $O$ ) auxquels sont tangents les cercles images du faisceau (figure de droite).



**III. Quelques propriétés moins évidentes**

**1. Cocyclicité**

En transformant deux points  $P$  et  $Q$ , les propriétés (I.2.ii) et (I.2.iii) nous donnent :

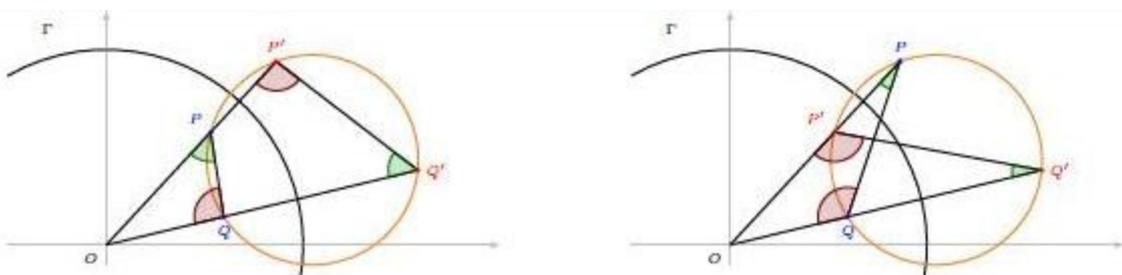
$$\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'} \quad \text{et} \quad \hat{P}OQ = \hat{Q}'OP'$$

ce qui signifie que les triangles  $OPQ$  et  $OQ'P'$  sont semblables d'où :

$$\hat{\theta}PQ = \hat{\theta}Q'P' \quad \text{et} \quad \hat{\theta}QP = \hat{\theta}P'Q'.$$

Une conséquence de cette égalité est que les angles de droites  $(P'P, P'Q')$  et  $(QP, QQ')$  sont égaux, ce qui signifie que les points  $(PP'QQ')$  sont cocycliques.

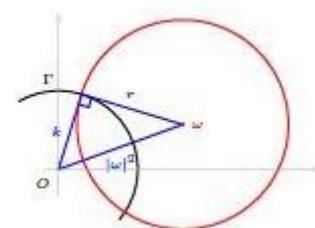
Derrière tout cela se cache la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle, ce qui est une autre histoire, puisque  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = k^2$



**2. Cercles globalement invariants**

En reprenant le résultat obtenu au (II.4.), un cercle centré sur le demi-axe des abscisses est invariant par l'inversion de rapport 1 si et seulement si  $\omega^2 = r^2 + 1$ .

En passant au cas général par le truchement d'homothéties et de rotations, il apparaît que le cercle de



[Retour au sommaire](#)

centre d'affixe  $\omega$  et de rayon  $r$  est globalement invariant par l'inversion de rapport  $k^2$  si et seulement si  $|\omega|^2 = r^2 + k^2$ .

Un petit coup de théorème de Pythagore nous permet de constater que les cercles globalement invariants sont ceux qui sont orthogonaux au cercle d'inversion.

### 3. Conformité

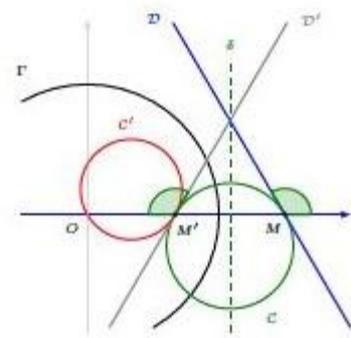
L'inversion conserve les angles au signe près et c'est d'ailleurs une des rares choses qu'elle laisse tranquille !

Vu que des droites peuvent être changées en cercles, il faut bien s'entendre sur la notion de conservation des angles ! Nous parlons ici d'angles entre courbes, c'est-à-dire d'angles géométriques entre les droites tangentes au point de contact.

Regardons déjà ce qu'il advient d'un angle en  $M$  entre une droite passant par  $O$  et une autre droite  $\mathcal{D}$  ne passant pas par  $O$ . Comme d'habitude, il n'est pas restrictif de prendre  $M$  sur l'axe  $(Ox)$ . Pour commencer, supposons que  $M \notin \Gamma$ , c'est-à-dire que  $M$  n'est pas invariant.

Appelons  $M'$  l'image de  $M$  et construisons le cercle  $\mathcal{C}$  passant par  $M$  et  $M'$  tel que  $\mathcal{D}$  soit sa tangente en  $M$ . Son centre est situé sur la médiatrice  $\delta$  du segment  $[MM']$ .

Ce cercle est globalement invariant et la droite  $\mathcal{D}$  est donc transformée en le cercle  $\mathcal{C}'$  passant par  $O$  et  $M'$ , tangent à  $\mathcal{C}$  en  $M'$ . La droite  $\mathcal{D}'$  symétrique de  $\mathcal{D}$  par rapport à  $\delta$  étant tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M'$ , l'est aussi à  $\mathcal{C}'$  en ce même point.



Par symétrie d'axe  $\delta$ , et compte tenu du fait que cette symétrie laisse  $(Ox)$  invariant nous avons

$$(\hat{Ox}, \mathcal{D}') = (\hat{\mathcal{D}}, Ox)$$

Finalement, nous avons établi que l'angle en  $M$  entre la droite  $(OM)$  et la droite  $\mathcal{D}$  est égal à l'angle en  $M'$  entre la droite  $(OM')$  (image de  $(OM)$ ) et le cercle  $\mathcal{C}'$  (image de  $\mathcal{D}$ ).

Reprenons le cas précédent, mais cette fois avec  $M \in \Gamma$ , c'est-à-dire  $M$  invariant.

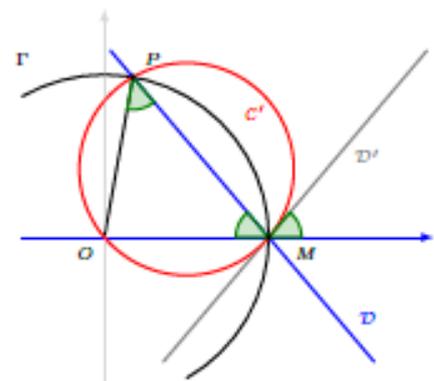
Lorsque la droite  $\mathcal{D}$  est perpendiculaire à  $(Ox)$ , son image est le cercle de diamètre  $[OM]$  et la tangente en  $M' = M$  à cette image est  $\mathcal{D}$ , donc encore perpendiculaire à  $(Ox)$ .

Considérons donc le cas où la droite  $\mathcal{D}$  n'est pas perpendiculaire à  $(Ox)$ .

Elle recoupe alors  $\Gamma$  en un autre point  $P$ , également invariant et l'image de la droite  $\mathcal{D}$  est le cercle  $\mathcal{C}'$  circonscrit à  $(OMP)$ .

Notons  $\mathcal{D}'$  la tangente à ce cercle en  $M$ .

Par prolongement limite du théorème de l'angle inscrit dans



le cercle  $C'$ , on a  $(P\hat{O}, PM) = (M\hat{O}, D') = (O\hat{x}, D')$

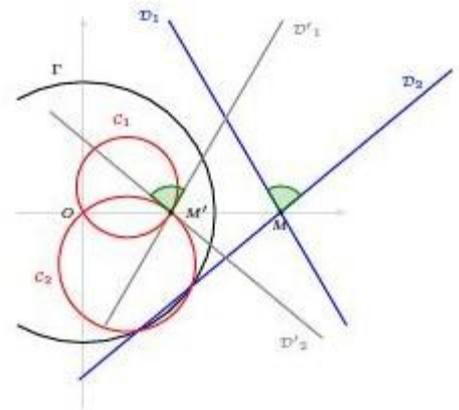
Comme le triangle  $OPM$  est isocèle de sommet  $O$ , on a de plus

$$(P\hat{O}, PM) = (M\hat{P}, MO) = (D\hat{B}; Ox)$$

Il en découle que  $(D\hat{B}; Ox) = (O\hat{x}, D')$  et que l'image  $C$  de  $D$  fait le même angle que  $D$  avec la droite  $(Ox)$ .

Il nous reste à analyser le cas d'un angle de deux droites dont aucune ne passe par  $O$  et là ce n'est plus qu'une histoire de relation de Chasles.

Considérons les droites  $D_1$  et  $D_2$  se coupant en  $M$  situé sur  $(Ox)$ . Ces droites sont respectivement transformées en deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  passant par  $O$  et par  $M' = F(M)$ .



L'angle entre ces deux cercles est l'angle formé par leurs tangentes respectives  $D'_1$  et  $D'_2$  en  $M'$ .

Les résultats précédents donnent :

$$(D\hat{1}_1, D_2) = (D\hat{1}_1, Ox) + (O\hat{x}, D_2) = (O\hat{x}, D'_1) + (D\hat{2}_2, Ox) = (D\hat{2}_2, D'_1)$$

et prouvent que les images font le même angle en  $M'$  que les objets en  $M$ .

Cela achève de prouver que l'inversion est une *transformation conforme*, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles géométriques.

#### IV. Quelques images de coniques

Considérons maintenant uniquement l'inversion de rapport 1.

Notons que la courbe d'équation polaire  $r = \phi(\theta)$  est transformée en la courbe d'équation polaire  $r' = \frac{1}{\phi(\theta)}$  puisque  $f(\phi(\theta) \cdot e^{i\theta}) = \frac{1}{\phi(\theta)} \cdot e^{i\theta}$ .

Rappelons enfin que le passage de l'équation cartésienne aux polaires se fait via  $\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$

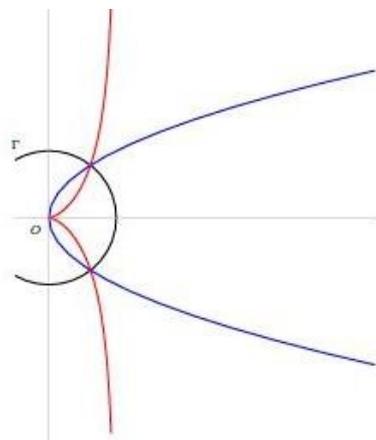
##### 1. Une parabole de sommet $O$

Son équation cartésienne  $y^2 = a \cdot x$  devient en polaire  $(r \cdot \sin(\theta))^2 = a \cdot r \cdot \cos(\theta)$  c'est-à-dire  $r = a \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$ .

Et son image a pour équation

$$r' = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{1}{\cos(\theta)} - \cos(\theta) \right)$$

Ce qui est une cissoïde de Dioclès.



## 2. Une hyperbole équilatère de sommet $O$

Son équation cartésienne

$$(x + a)^2 - y^2 = a^2$$

devient en polaire

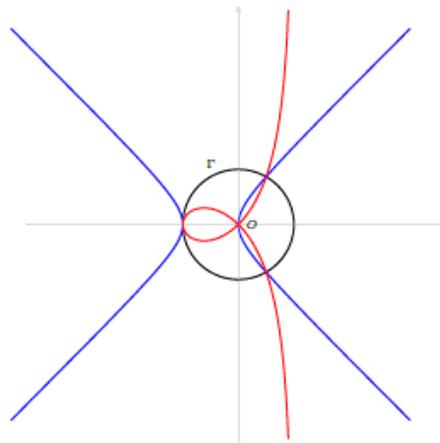
$$r^2 \cdot \cos(2\theta) + 2ar\cos(\theta) = 0$$

c'est-à-dire  $r = -\frac{2a\cos(\theta)}{\cos(2\theta)}$

Et son image a pour équation

$$r' = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$$

Ce qui est une *strophoïde*.



## 3. Une hyperbole équilatère de centre $O$

Son équation cartésienne

$$x^2 - y^2 = a^2$$

devient en polaire

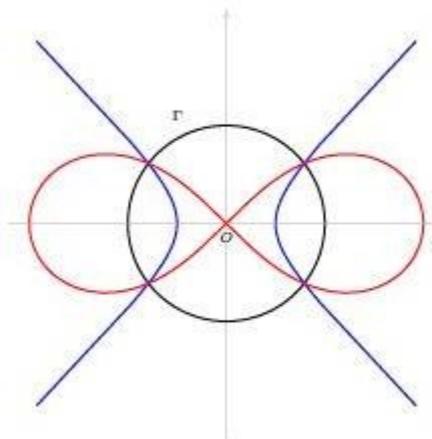
$$r^2 \cdot (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = a^2$$

c'est-à-dire  $r = \frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$

Et son image a pour équation

$$r' = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\cos(2\theta)}$$

Ce qui est une *lemniscate de Bernoulli*.



## 4. Une ellipse de centre $O$

Son équation cartésienne  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

devient en polaire

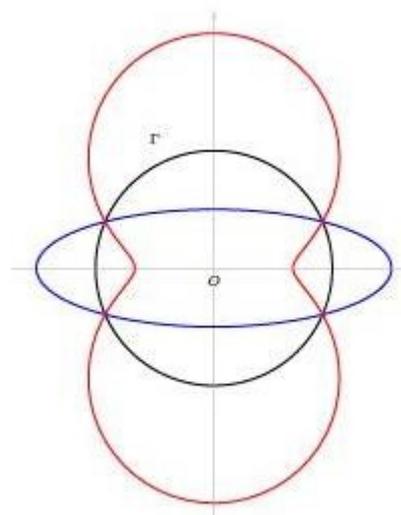
$$r^2 \cdot \left( \frac{\cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{1 - \cos^2(\theta)}{b^2} \right) = 1$$

c'est-à-dire  $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2(\theta)}}$

Et son image a pour équation

$$r' = \frac{1}{ab} \cdot \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2(\theta)}$$

Ce qui est une *courbe de Booth*.



### 5. Une ellipse de sommet $O$

Son équation cartésienne

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

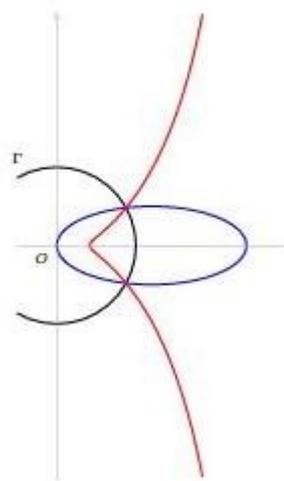
devient en polaire

$$r = \frac{2ab^2 \cos(\theta)}{b^2 \cdot \cos^2(\theta) + a^2 \cdot \sin^2(\theta)}$$

Et son image a pour équation

$$\begin{aligned} r' &= \frac{b^2 \cdot \cos^2(\theta) + a^2 \cdot \sin^2(\theta)}{2ab^2 \cos(\theta)} \\ &= u \cos(\theta) + \frac{v}{\cos(\theta)} \end{aligned}$$

courbe de la famille des cubiques circulaires rationnelles droites.



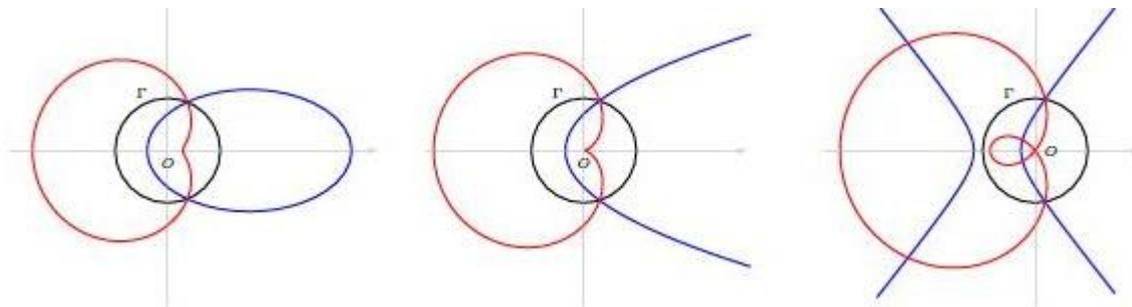
### 6. Conique de foyer $O$ et d'excentricité $e$

Son équation polaire est du type  $r = \frac{p}{1+e \cdot \cos(\theta)}$

et donc son image a pour équation polaire  $r' = \frac{1}{p}(1 + e \cdot \cos(\theta))$

ce qui est un *limaçon de Pascal* (pas Blaise, son père Étienne).

Trois cas sont évidemment à distinguer suivant la position de  $e$  par rapport à 1 :



## V. Des courbes anallagmatiques

### 1. Mais c'est quoi ?

Une courbe *anallagmatique* est une courbe globalement invariante par inversion géométrique.

Nous en avons déjà croisé quelques unes : le cercle  $\Gamma$ , les droites passant par  $O$ , les cercles orthogonaux à  $\Gamma$ .

### 2. Un résultat intéressant

Considérons une courbe  $\mathcal{G}$ , appelée *déférente*, et un point  $M$  décrivant cette courbe.

Pour chaque point  $M$ , traçons le cercle  $\mathcal{C}_M$  de centre  $M$  orthogonal à  $\Gamma$ .

Pour ce faire, on trace le cercle  $\gamma$  de diamètre  $[OM]$  qui coupe  $\Gamma$  en deux points  $A$  et  $B$  et le cercle cherché est tout simplement le cercle de centre  $M$  passant par  $A$  et  $B$  (voir figure de gauche ci-dessous).

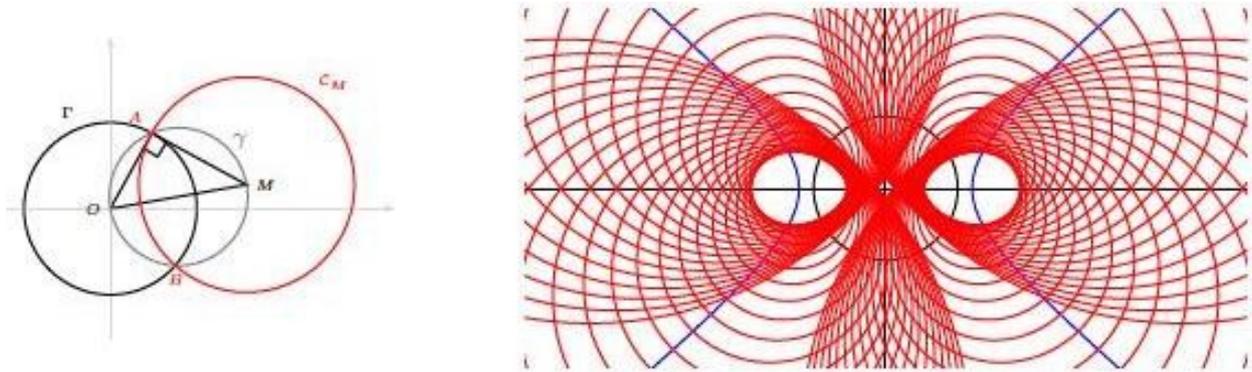
Tous ces cercles sont globalement invariants par l'inversion et la courbe  $\mathcal{C}$  qu'ils enveloppent

[Retour au sommaire](#)

est transformée en une courbe qui est tangente à tous ces cercles (conservation du contact), c'est-à-dire en elle-même.

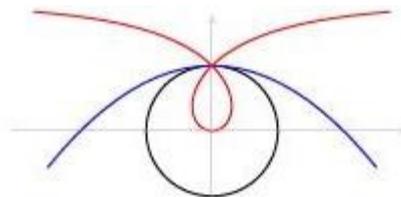
En conclusion, l'enveloppe  $\mathcal{C}$  de la famille de cercles  $\{C_M ; M \in \mathcal{G}\}$  est anallagmatique.

Sur la figure de droite ci-dessous nous avons le cas particulier où la déférente  $\mathcal{G}$  est une hyperbole de centre  $O$  (en bleu :  $\frac{x^2}{1,5^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ ), ce qui fournit un *ovale de Cassini* comme courbe anallagmatique.



### 3. Quelques exemples de courbes anallagmatiques

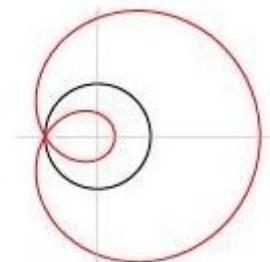
La *strophoïde* (en rouge) est anallagmatique lorsque le pôle d'inversion est au sommet de la boucle et que le point double est sur le cercle d'inversion.



Elle correspond au cas où la déférente est une parabole (en bleu) de sommet le point double.

Le *limaçon de Pascal* avec le point double sur  $\Gamma$  (en rouge) est anallagmatique dans le cas où son équation complexe est du type :

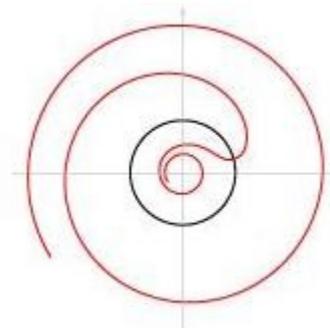
$$z = -1 + (\sqrt{b(b-2)} + b \cos(\theta))e^{i\theta} \text{ avec } b > 2.$$



Les *spiraales anallagmatiques* ont une équation du type  $r = (n\theta \pm \sqrt{n^2\theta^2 - 1})^{\frac{1}{n}}$  avec  $n > 0$ .

La partie avec le signe + est extérieure au cercle d'inversion et celle avec le signe - lui est intérieur.

La figure ci-contre a été faite avec  $n = 4$  pour  $\theta$  variant de 0,25 à 10



## VI. L'inversion en mécanique et en optique

### 1. L'inverseur de Peaucelier

Il s'agit d'un système à barres articulées. Un losange déformable est relié par deux bras au point  $O$ , pôle de l'inversion, et les longueurs  $a$  et  $b$  sont choisies telles que  $a^2 - b^2 = k^2$ .

Sur la figure de gauche, il apparaît que

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = (\vec{OH} + \vec{HM}) \cdot (\vec{OH} - \vec{HM}) = OH^2 - HM^2 = a^2 - AH^2 - HM^2 = a^2 - b^2 = k^2$$

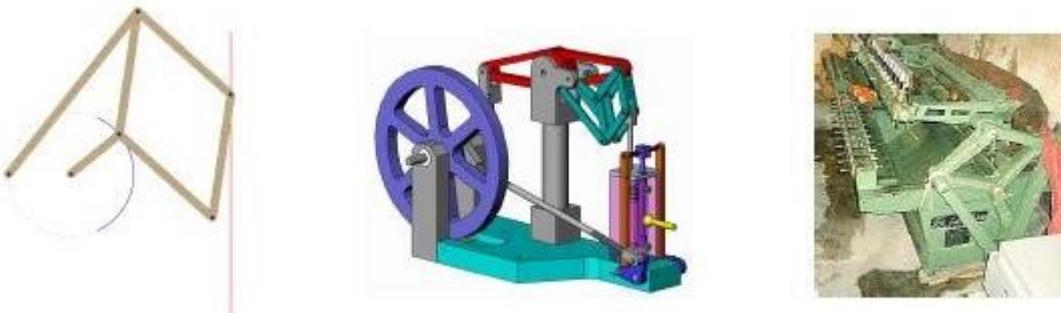
ce qui prouve que  $M$  et  $M'$  sont bien inverses l'un de l'autre par l'inversion de pôle  $O$  et de rapport  $k^2$ .

Il suffit de fixer le point  $O$  sur la table à dessin et de faire décrire une courbe au point  $M$  pour que le point  $M'$  trace l'inversion de cette courbe.



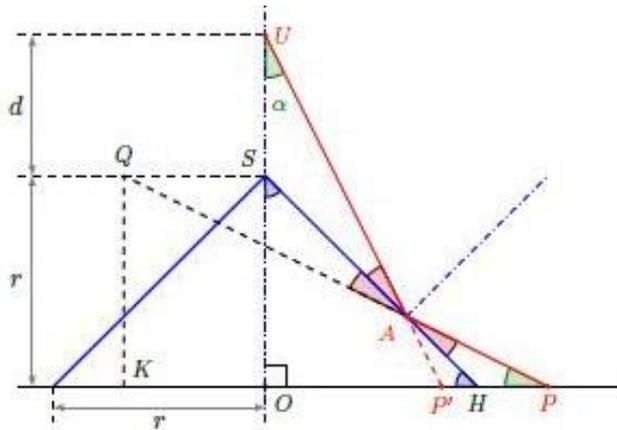
En mécanique, cela fournit un moyen efficace de transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne (ou inversement) sans contrainte latérale comme dans le système de piston et bielle.

Il suffit d'astreindre, par une barre supplémentaire, le point  $M$  à se déplacer sur un cercle passant par  $O$  pour que  $M'$  décrive un segment de droite parfaitement rectiligne.



### 2. Anamorphose par réflexion conique

Nous observons une image dans un miroir conique d'angle au sommet  $90^\circ$  (seul cas en rapport direct avec l'inversion), l'oeil  $U$  étant situé sur l'axe à une distance  $d$  du sommet du cône. Un rayon issu d'un point  $P$  vient vers notre oeil après avoir rebondi sur le miroir en  $A$ , ce qui nous donne l'impression de le voir en  $P'$ .



Les lois de la réflexion fournissent  $\hat{U}AS = \hat{P}AH$ , et comme  $\hat{U}SA = \hat{P}HA = 135^\circ$ , il s'en suit que les triangles  $USA$  et  $PHA$  sont semblables, et que donc  $\hat{S}UA = \hat{H}PA$ .

Soit  $Q$  le point d'intersection de la droite  $(PA)$  avec la parallèle à  $(OH)$  passant par  $S$ , et  $H$  son projeté perpendiculaire sur  $(OK)$ .

Comme angles opposés, nous avons  $\hat{Q}AS = \hat{P}AH$  et donc  $\hat{Q}AS = \hat{U}AS$ .

Comme de plus  $\hat{U}SA = \hat{Q}SA = 135^\circ$  et qu'ils ont un côté commun, les triangles  $USA$  et  $QSA$  sont isométriques.

Nous en déduisons que  $US = QS = KO = d$ .

Dans les triangles rectangles  $UOP'$  et  $QKP$ , nous avons donc :  $\tan(\alpha) = \frac{OP'}{OU} = \frac{QK}{PK}$

En posant  $x = OP$  et  $x' = OP'$  cela donne :  $\frac{x'}{d+r} = \frac{r}{x+d}$

Ce qui nous donne la relation :  $x = \frac{r(d+r)}{x'} - d$

Le point  $P$  est donc l'image de  $P'$  par l'inversion de pôle  $O$  et de rapport  $\sqrt{r(d+r)}$ , suivie d'un décalage radial vers  $O$  d'une distance  $d$ .

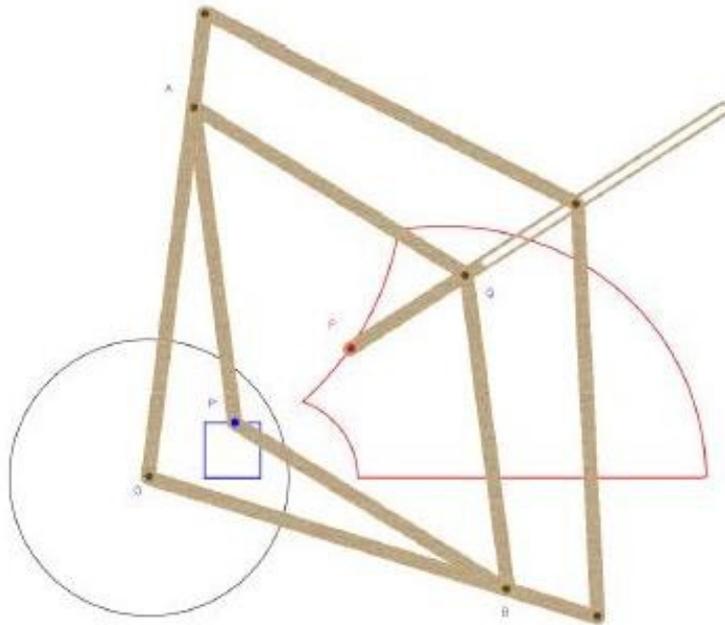
Appelons  $\Phi$  cette transformation un peu curieuse.

Si, par exemple, on veut observer un carré dans le miroir (lieu des points  $P'$ ), il faudra que  $P$  décrive l'image par  $\Phi$  de ce cercle.

Il est possible d'adapter l'inverseur de Peaucellier à cette transformation.

Considérons le cas d'un miroir conique de diamètre de base 20 cm et de hauteur 10 cm avec l'œil placé à 10 cm au dessus du sommet du cône ( $h = r = d = 10$ ).

On prend l'inverseur de Peaucellier avec  $a = OB = OA = 27$  cm et  $b = AP' = AQ = BP' = BQ = 23$  cm. Il concrétise une inversion de rapport  $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{200} = \sqrt{r(d+r)}$ .



Pour obtenir  $P = \Phi(P')$ , il suffit alors de translater le point  $Q$  de 10 cm dans la direction de  $O$ . On ajoute deux barres supplémentaires afin de guider une barre coulissante passant par  $Q$  et dans le prolongement de  $O$ , et de placer le point  $P'$  à 10 cm de  $Q$  sur cette barre articulée.