Problème n° 138 - les lapins meurent aussi !

Proposé par Philippe Févotte

Dans le modèle proposé par Fibonacci, décrivant la croissance d'une population de lapins, un couple de lapins est placé dans un enclos isolé de l'extérieur. Après deux mois de vie, un couple de lapins donne naissance chaque mois à un nouveau couple de lapins.

On suppose désormais, de plus, que les lapins meurent au bout de quatre mois. Ainsi, ils ne mettent bas que deux fois.
On note U_n le nombre de couples de lapins au premier jour du $n-i\grave{e}me$ mois.
Ainsi $U_1 = 1$et $U_2 = 1$
Quelle est la limite de $\frac{U_{(n+1)}}{U_n}$?

Retour au sommaire

Solution du problème du trimestre N° 137

d'après un problème proposé par Jacques Choné

***Rappel de l'énoncé* :**

On se donne un nombre entier n.

Deux joueurs lancent chacun à leur tour une pièce équilibrée. Le joueur 1 lance en premier la pièce, puis le joueur 2, etc… et on finit par le joueur 1. Ainsi le joueur 1 lance la pièce une fois de plus que le joueur 2.

On note Xle nombre de « Pile » obtenus par le joueur 1 au bout de ses $n+1$ lancers et Y le nombre de « Pile » obtenus par le joueur 2 au bout de ses$n$lancers.

1) Déterminez la probabilité $P(X > Y)$
2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}\sum_{l=k+1}^{n+1}\binom{n+1}{l})$

***Solution* :**

On peut remarquer que l'ordre des lancers n'a pas d'importance et que seul importe le résultat final. Ainsi Xet Ysuivent une loi binomiale, de paramètres $n+1, \frac{1}{2}$ pour la première et $n, \frac{1}{2}$ pour la seconde.

La variable $X' = n+1-X$ suit la même loi que X et $Y' = n - Y$ suit la même loi que Y.

Par conséquent $P(X > Y) = P(n+1-X' > n-Y') = P(X' < Y'+1) = P(X' \leq Y')$

De plus $P(X' \leq Y') = P(X \leq Y)$

Sachant que $P(X \leq Y) + P(X > Y) = 1$ on en déduit que $P(X > Y) = \frac{1}{2}$

On a par ailleurs $p(X > Y) = \sum_{k=0}^{n}(P_{(Y=k)}(X > k)P(Y=k))$ et par conséquent :

$$P(X > Y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n (\binom{n}{k}\sum_{l=k+1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)}\binom{n+1}{l})$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n (\binom{n}{k}\sum_{l=k+1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)}\binom{n+1}{l}) = \frac{1}{2}$

et par conséquent $\left(\frac{1}{2}\right)^{(2n+1)}\sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}\sum_{l=k+1}^{n+1}\binom{n+1}{l}) = \frac{1}{2}$ ou encore $\sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}\sum_{l=k+1}^{n+1}\binom{n+1}{l}) = 2^{2n}$

Une solution a été donnée par Claude Morin qui propose de plus, en s'appuyant sur des changements de variables, une démonstration directe de ce dernier résultat :

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}\sum_{l=k+1}^{n+1}\binom{n+1}{l})$

En prenant $l' = n+1-l$ on a $S_n = \sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}\sum_{l'=0}^{n-k}\binom{n+1}{l'})$

puis $k' = n-k$ on a $S_n = \sum_{k'=0}^{n}(\binom{n}{k'}\sum_{l'=0}^{k'}\binom{n+1}{l'})$ ou encore $S_n = \sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{n+1}{l})$.

Par conséquent $2S_n = \sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{n+1}{l}) + \sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}\sum_{l=k+1}^{n+1}\binom{n+1}{l})$

soit $2S_n = \sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}(\sum_{l=0}^{k}\binom{n+1}{l}) + \sum_{l=k+1}^{n+1}\binom{n+1}{l}))= \sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k}(2^{(n+1)}))= 2^{(2n+1)}$ d'où on déduit le résultat attendu.

Retour au sommaire