PROBLÈME N° 139 - RECORD !

Proposé par Philippe Févotte

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire ces jetons au hasard, un par un et sans remise, et on note $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ la liste des numéros tirés.

Pour tout entier i compris entre 2 et n, on dit qu'il y a record à l'instant i si le jeton u_i est plus grand que tous les numéros précédemment tirés ; on convient qu'il y a toujours un record à l'instant 1.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de records obtenus au cours des n tirages.

1- Déterminer, pour tout entier i compris entre 2 et n, la probabilité d'obtenir un record à l'instant i.

2- Déterminer l'espérance de X_n.

SOLUTION DU PROBLEME N°138

Une solution est proposée par Jacques Choné.

La suite est déterminée par $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 2$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-4}$ pour $n \geq 5$.

Une suite géométrique de raison x complexe vérifie la relation précédente si et seulement si cette raison vérifie $x^4 = x^3 + x^2 - 1$ soit $(x-1)(x^3 - x - 1) = 0$

En résolvant l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ par la méthode de Cardan, on trouve les trois solutions définies par :

$$a = u + v, b = ju + j^{\,2} v \; et \; c = j^{\,2}u + jv \; avec \; j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Les calculs donnent $u = (\frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{23}{27}}))^{\frac{1}{3}}$ et $v = (\frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{23}{27}}))^{\frac{1}{3}}$.

On obtient alors $u_n = \alpha + \beta a^n + \gamma b^n + \delta c^n$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ étant déterminé à partir des valeurs initiales de la suite (u_n). Notons pour conclure qu'on n'a pas besoin de la valeur de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, son existence étant assurée car c'est la solution d'un système de Van Der Monde.

On a donc $u_n = a^n\,(\frac{\alpha}{a^n} + \beta + \gamma(\frac{b}{a})^n + \delta(\frac{c}{a})^n)$ avec $a = 1{,}324\ldots > 1$ et $|b| = |c| < 1$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$

J'ajouterai quelques remarques :

La résolution de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ est associée aux suites (v_n) définies par leurs premiers termes et la relation de récurrence $v_n = v_{n-2} + v_{n-3}$ (*)

On montre aisément par récurrence que la suite (u_n) vérifie cette relation (*). Cette suite est connue sous le nom de suite de Padovan, du nom de l'architecte Richard Padovan qui l'introduisit sous forme géométrique (voir par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Padovan ou pour en savoir davantage http://serge.mehl.free.fr/anx/suite_padovan.html) et le nombre a est appelé nombre plastique.

Retour au sommaire