LE PROBLÈME DU TRIMESTRE (n°136)

Proposé parJacques Choné

Trouver une condition nécessaire sur le degré du polynôme non nul, à coefficients réels, $P(X)$, pour qu'il divise dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X^2+X+1)$.

Le responsable de cette rubrique est philippe.fevotte@wanadoo.fr . Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT (n°135)

Aucune réponse à ce problème n'est parvenue.

Dans une première approche, on peut admettre que seule importe la position relative des lettres A et B et non leur position sur le segment.

Ainsi, les $a+b$ points étant choisis, le nombre de façon de les nommer A ou B est $\binom{a+b}{a}$.

Les cas « favorables » sont ceux qui correspondent au placement des a lettres A dans $b+1$ positions possibles

Parmi toutes ces possibilités, celles qui sont « favorables » sont au nombre de $\binom{b+1}{a}$. Par conséquent la probabilité cherchée est $\dfrac{\binom{b+1}{a}}{\binom{a+b}{a}}$

Jacques Choné propose une démonstration plus rigoureuse :

On considère la variable aléatoire X égale à 1 quand l'événement est réalisé et égale à 0 sinon et Y la variable aléatoire correspondant au choix des $a+b$ points (voir la note (1)).

La probabilité cherchée est $E(X)$.

D'après le théorème de l'espérance totale (voir la note (2)), on a $E(X)=E(E(X/Y))$.

Or $E(X)$ = $\dfrac{\binom{b+1}{a}}{\binom{a+b}{a}}$

En effet les $a+b$ points étant choisis il y a $\binom{a+b}{a}$ façons de les étiqueter A ou B.

C'est le « nombre de cas possibles ». Pour évaluer le « nombre de cas favorables », il suffit de se représenter une suite de b lettres B laissant $b-1$ espaces entre elles ;

il y a alors $b+1$ positions possibles pour les a lettres A ; le nombre de cas favorables est donc $\binom{b+1}{a}$.

Comme $E(X/Y)$ est constante, la probabilité demandée est (voir note(3)) :

$$E(X)=E(E(X/Y))=\frac{\binom{b+1}{a}}{\binom{a+b}{a}}$$

Il propose également un algorithme, en Python pour simuler ces tirages :

```
import random
def expe(a,b): # effectue une expérience
    la=[random.random() for k in range(a)]
    lb=[random.random() for k in range(b)]
    lb.sort();lb=[0]+lb+[1];
    for k in range(len(lb)-1):
        if interv(la,lb[k],lb[k+1])>=2:
            return (False)
    return (True)
def interv(li,x,y):
    #renvoie le nombre d'éléments li dans l'intervalle[x,y]
    c=0
    for k in range (len(li)):
        if li[k]<=y and li[k]>=x:
            c=c+1
    return (c)
def probe(m,a,b):
# renvoie la fréquence relative à m expériences de l'événement
    f=0
    for k in range (m):
        if expe(a,b)==True:
            f=f+1
    return (f/m)
```

Notes :

(1) Si on asssimile le segment initial à l'intervalle $]0;1[$, on peut voir Y comme un vecteur aléatoire : l'application de l'ensemble des éventualités dans $]0;1[^{(a+b)}$ qui associe à chaque choix des $a+b$ points leurs abscisses.

(2) Voir par exemple