ÉTUDE MATHÉMATIQUE

LE BILLARD CIRCULAIRE

Alain Satabin

Énoncé du problème

Dans un billard à bord circulaire sont placées deux billes distinctes A et B. Le problème consiste à trouver les points M de la circonférence où la bille A doit aller rebondir, sans effet, pour aller ensuite choquer la bille B.

Restrictions et notations

Les billes sont représentées par des points sans dimension du plan (noté P) et le bord du billard correspond au cercle C de centre O et de rayon 1. On supposera par ailleurs qu'aucune des deux n'est au centre du billard, cas où le problème devient trivial (les deux points de rebond possibles sont alignés sur les deux billes).

Posons OA = a et OB = b. Le problème étant symétrique, on peut supposer que $0<a\leqslant b<1$.

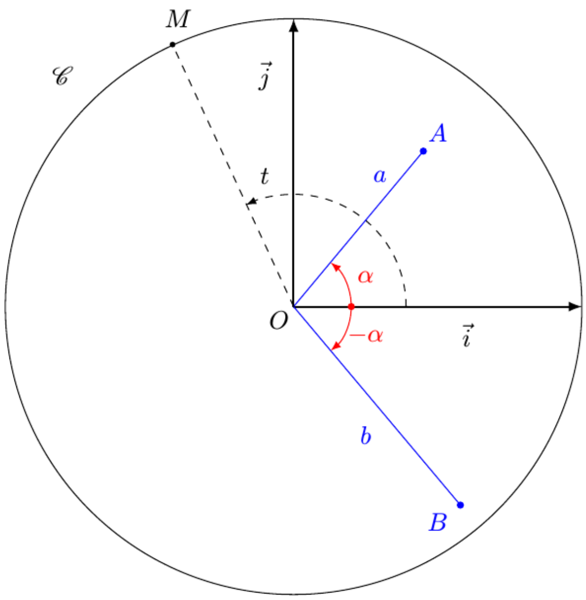
Posons $\widehat{\left(\overrightarrow{OB}\,,\,\overrightarrow{OA}\right)}=2\alpha\;[2\pi]$.

Quitte à symétriser la figure, on peut supposer que $\alpha\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Prenons le vecteur $\vec{i}$ unitaire tel que $\widehat{\left(\vec{i}\,,\,\overrightarrow{OA}\right)}=\alpha\;[2\pi]$ et $\vec{j}$ tel que $\mathrm{R}=\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ soit orthonormé direct. Pour $M\in\mathrm{C}$, on note t son angle polaire avec $t\in]-\pi\,,+\pi]$.

L'ensemble des points M solutions du problème sera noté S et l'ensemble des arguments $t\in]-\pi\,,+\pi]$ solutions sera noté E. On a donc $\mathrm{S}=\left\{e^{it}\,;\,t\in\mathrm{E}\right\}$.

Nous avons donc la situation suivante :



Par la suite, nous noterons S_{Δ} la réflexion d'axe Δ et $R_{K,\theta}$ la rotation de centre K et d'angle θ.

Analyse du problème

En vertu de la loi de réflexion de Descartes, $M\in\mathrm{S}$ si et seulement si la droite (OM), normale au bord du billard, est bissectrice de l'angle formé par les demi-droites $[MA)$ et $[MB)$; c'est-à-dire lorsque la réflexion $S_{(OM)}$ transforme la demi-droite $[MA)$ en la demi-droite $[MB)$.

retour au sommaire

En posant $A' = S_{(OM)}(A)$, on a $OA' = OA$, ce qui signifie que A' est situé à l'intérieur du cercle C et donc $M \in$ S si et seulement si $MA'B$ sont alignés. Cela équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires (nécessairement de même sens).

En remarquant que $S_{(OM)} \circ S_{(Ox)} = R_{O,2t}$ on obtient $S_{(OM)} = R_{O,2t} \circ S_{(Ox)}$.

Ce qui permet de voir que $S_{(OM)}$ est associé à la transformation complexe : $\begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \rightarrow \bar{z}\,.\,e^{2it} \end{cases}$

L'affixe de *A* étant $a \cdot e^{i\alpha}$, celle de *A'* est donc $a \cdot e^{i(2t-\alpha)}$ et on déduit que :

$\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{MB'}$ colinéaires $\Leftrightarrow (z_{A'} - z_M)\overline{(z_B - z_M)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a \cdot e^{i(2t-\alpha)} - e^{it})(b \cdot i^{i\alpha} - e^{-it}) \in \mathbb{R}$

Cela permet d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que l'argument t convienne :

$$\boxed{t \in \mathrm{E} \Leftrightarrow a\,b\,e^{2it} - a\,e^{i(t-\alpha)} - b\,e^{i(t+\alpha)} \in \mathbb{R}} \text{(i)}$$

Résolution du problème

Une traduction géométrique de la condition

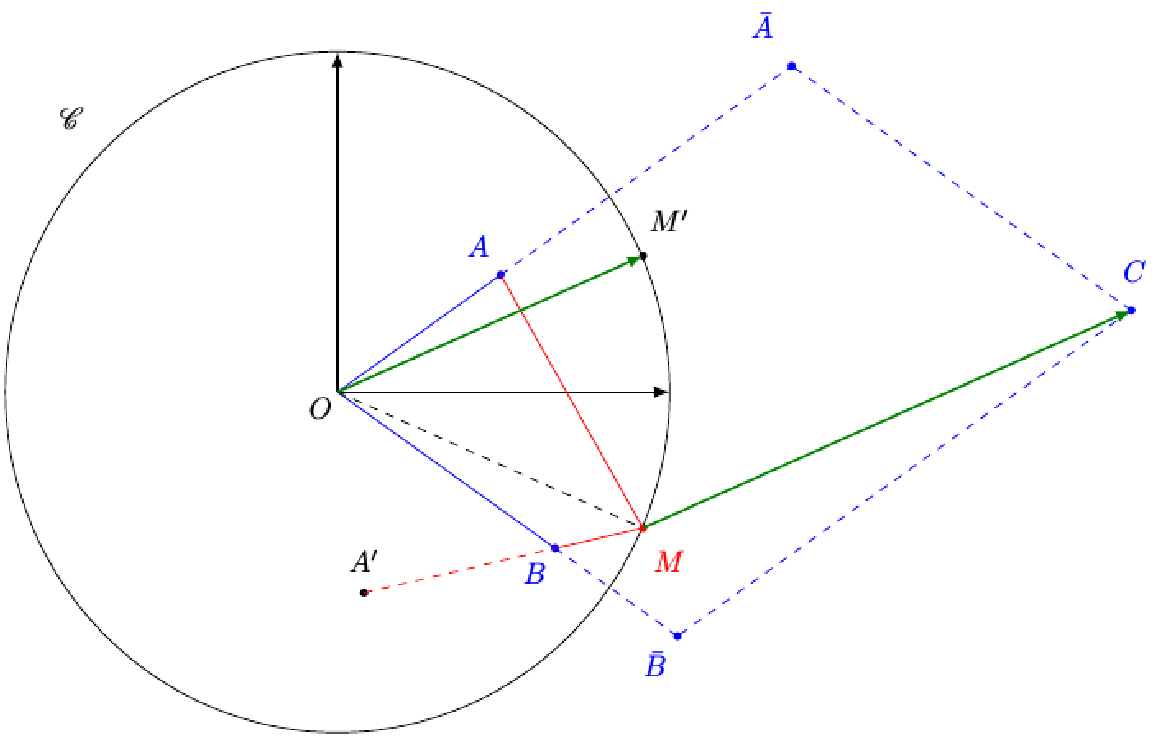
En divisant par (-*ab*) et en mettant e^{it} en facteur, la condition (i) peut également s'écrire :

$$t \in \mathrm{E} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}e^{i\alpha} + \frac{1}{b}e^{-i\alpha} - e^{it}\right) \cdot e^{it} \in \mathbb{R} \text{ (ii)}$$

Considérons l'inversion unitaire de pôle *O* : $\sigma \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}} \end{cases}$

$\bar{A} = \sigma(A)$ et $\bar{B} = \sigma(B)$ ont respectivement pour affixes $\frac{1}{a}e^{i\alpha}$ et $\frac{1}{b}e^{i\alpha}$ et le point C tel que $O\bar{A}C\bar{B}$ est un parallélogramme a pour affixe $\frac{1}{a}e^{i\alpha} + \frac{1}{b}e^{i\alpha}$.

En considérant *M'* le symétrique de *M* par rapport à (Ox), d'affixe e^{-it}, on remarque que (ii) traduit le fait que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires, ou encore que (*OM'*) // (*MC*).



retour au sommaire

$M \in S \Leftrightarrow M \in C \cap H$ avec $H = \left\{ M \in P ; \overrightarrow{MC} \text{ et } \overrightarrow{OS_{(Ox)}(M)} \text{ colinéaires} \right\}$ (iii)

Remarque générale sur l'ensemble H

Soit $K(e,f)$ le milieu de $[\bar{A}\,\bar{B}]$; le point C a alors pour coordonnées ($2e$, $2f$) et on a :

$$M(x,y) \in H \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \text{ et } \overrightarrow{OM'} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x-2e \\ -y & y-2f \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2xy - 2f\,x - 2y\,e = 0$$

ce qui donne l'équation de H :

$$\boxed{H = \{M(x,y) \in P ;\ y(x-e) = f\,x\}} \text{(iv)}$$

Par ailleurs, les affixes de $\bar{A}$ et $\bar{B}$ exprimées au §[4.1] permettent d'obtenir les coordonnées de K :

$$\boxed{e = \frac{b+a}{2ab}\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad f = \frac{b-a}{2ab}\sin(\alpha)} \text{(v)}$$

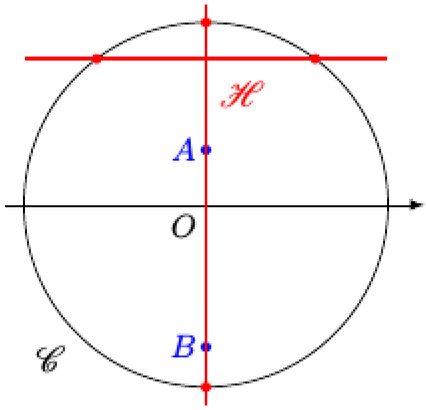
Remarquons au passage qu'avec les conventions du §[2], *e* et *f* sont positifs ou nuls.

Analysons tout d'abord les cas où l'un au moins est nul.

Cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Cela correspond au cas où $O \in [AB]$.

On a *e* = 0 et H est alors la réunion des droites $x = 0$ et $y = f = \frac{b-a}{2ab}$.



Suivant la position de la droite horizontale, nous avons 2 ou 4 solutions.

Remarquons que le point (0 ; -1) ne constitue pas une solution physique car la bille *A* passerait au travers de la bille *B* avant d'aller rebondir, mais dans le cadre de l'étude mathématique nous conviendrons de garder ce type de solution.

$$\begin{cases} \text{si } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{b-a}{2ab} \geqslant 1 & E = \left\{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right\} \\ \text{si } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{b-a}{2ab} < 1 & E = \left\{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} ; \arcsin\left(\frac{b-a}{2ab}\right) ; \pi - \arcsin\left(\frac{b-a}{2ab}\right)\right\} \end{cases} \text{(vi)}$$

Cas où $\alpha = 0$

Cela correspond au cas où $A \in [OB]$. On a *f* = 0 et H est alors la réunion des droites $y = 0$ et $x = e = \frac{a+b}{2ab}$.

Or $0 < a \leqslant b < 1 \Rightarrow a(1-b) + b(1-a) > 0 \Rightarrow a + b > 2ab \Rightarrow \frac{a+b}{2ab} > 1$

La droite $x = e$ n'intersecte pas C et il n'y a que les deux points $(-1 ; 0)$ et $(1 ; 0)$ qui conviennent.

$$\boxed{\text{si } \alpha = 0 \quad E = \{0 ; \pi\}} \text{(vii)}$$

retour au sommaire

Cas où $a = b$

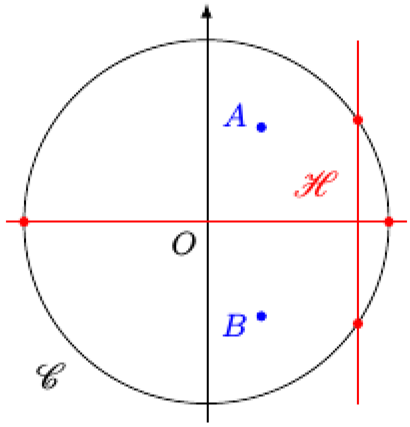
Ce cas peut-être réalisé simultanément avec le cas $\alpha=\frac{\pi}{2}$,

mais pas avec le cas $\alpha=0$ puisque $A\neq B$.

A et *B* sont équidistants de *O* et on a *f* = 0.

H est la réunion des droites $y=0$ et $x=e=\frac{\cos(\alpha)}{a}$.

Suivant les valeurs relatives de a et α, nous pouvons avoir 2 ou 4 solutions pour M.



$$\begin{cases} \text{si} \quad a=b \text{ et } \quad \cos(\alpha)\geqslant a \quad \mathsf{E}=\{0\,;\,\pi\} \\ \text{si} \quad a=b \text{ et } \quad \cos(\alpha)<a \quad \mathsf{E}=\left\{0\,;\,\pi\,;\,\arccos\left(\frac{\cos(\alpha)}{a}\right);\,-\arccos\left(\frac{\cos(\alpha)}{a}\right)\right\} \end{cases} \text{(viii)}$$

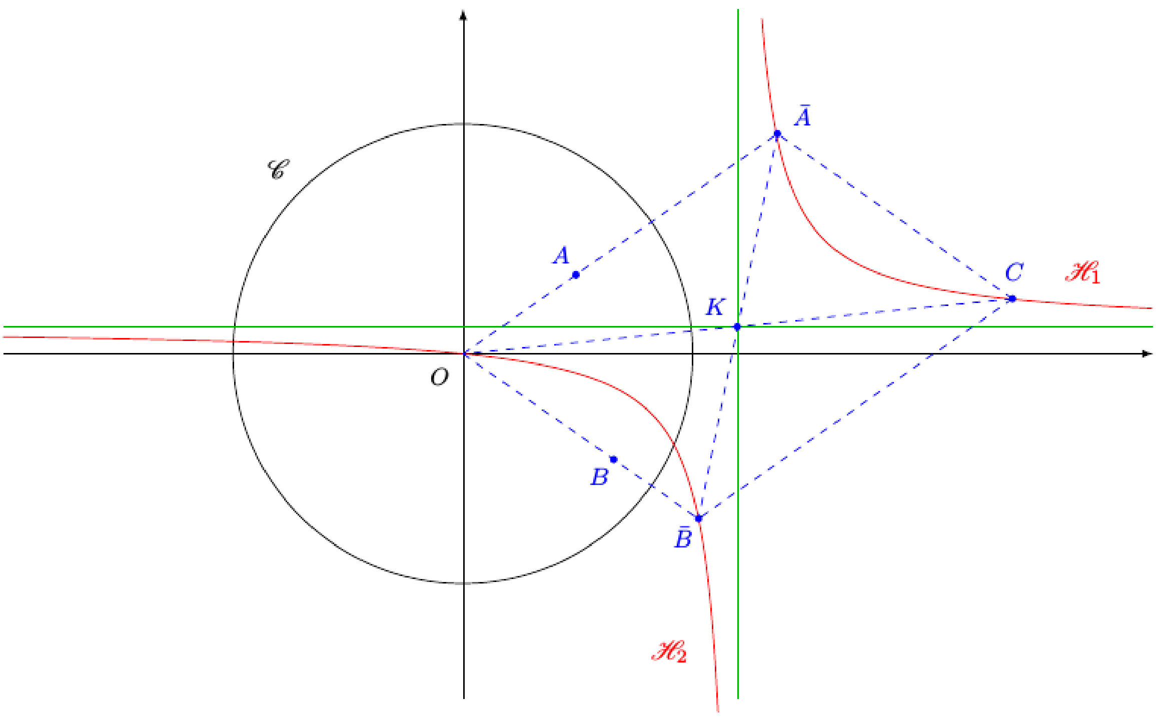
Le cas général : e ≠ 0 et f ≠0

Ce cas élimine les 3 cas particuliers examinés précédemment.

La courbe H est alors une hyperbole d'équation $y=\frac{f\,x}{x-e}$ d'asymptotes $x=e$ et $y=f$, et de centre $K(e\,;f)$.

Il est clair que $O\in$H, de même que *C* qui est son symétrique par rapport à *K*.

Par ailleurs, en remplaçant l'affixe de $\bar{A}\left(\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\alpha}\right)$ dans l'expression (ii), on obtient $\frac{1}{a\,b}$ qui est bien réel. Donc $\bar{A}\in$H, et de même $\bar{B}$ qui est son symétrique par rapport à K.



Il est clair que la branche d'hyperbole H$_2$ passant par O coupe toujours C en 2 points qui fournissent deux solutions au problème posé.
Pour étudier l'éventualité d'autres points solutions, calculons la distance de O à la branche d'hyperbole H$_1$ ne passant pas par O.

Pour $x>e$ et $M\left(x\,;\,\frac{f\,x}{x-e}\right)$ un point de H$_1$, posons $\phi_{e,f}(x)=OM^2=x^2+\left(\frac{f\,x}{x-e}\right)^2$.

On cherche à déterminer $\mu_{e,f}=(\mathrm{d}(O\,;\,\mathrm{H}_1))^2=min_{]e\,;+\infty[}(\phi)$

On a $\phi'(x)=2\,x+2\left(\frac{f\,x}{x-e}\right)\left(\frac{-\,ef}{(x-e)^2}\right)=2\,\frac{x\,(x-e)^3-ef^2\,x}{(x-e)^3}=\frac{2\,x}{(x-e)^3}\,((x-e)^3-ef^2)$

comme $(x-e)^3-ef^{\,2}=\left(x-e-\sqrt[3]{ef^{\,2}}\right)\,\left((x-e)^2+(x-e)\,\sqrt[3]{ef^{\,2}}+\sqrt[3]{e^2\,f^4}\right)$

$\phi'(x)$ a le même signe sur $]\,e\,;+\infty\,[$ que $\left(x-e-\sqrt[3]{ef^{\,2}}\right)$ et donc ϕ atteint un minimum en $x_{min}=e+\sqrt[3]{ef^{\,2}}$ et ce minimum vaut :

$$\mu_{e,\,f}=\phi\left(e+\sqrt[3]{ef^{\,2}}\right)=\left(e+\sqrt[3]{ef^{\,2}}\right)^2+\left(\frac{\left(e+\sqrt[3]{ef^{\,2}}\right)\,f}{\sqrt[3]{ef^{\,2}}}\right)^2=\left(e+\sqrt[3]{ef^{\,2}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{e^2\,f}+f\right)^2$$

en mettant $\sqrt[3]{e}$ (resp. $\sqrt[3]{f}$) en facteur dans la 1re (resp. 2^e) parenthèse, on obtient :

$$\mu_{e,\,f}=\sqrt[3]{e^2}\left(\sqrt[3]{e^2}+\sqrt[3]{f^2}\right)^2+\sqrt[3]{f^2}\left(\sqrt[3]{e^2}+\sqrt[3]{f^2}\right)^2=\left(\sqrt[3]{e^2}+\sqrt[3]{f^2}\right)^3$$

et comme $\mathrm{H}_1\cap\mathrm{C}=\emptyset\;\Leftrightarrow\;\mu_{e,\,f}>1$ on obtient le résultat général suivant :

$$\boxed{\text{pour}\quad e\times f\neq 0\quad\begin{cases}\text{si}\quad\sqrt[3]{e^2}+\sqrt[3]{f^2}>1 & \text{card}\,(\mathrm{S})=2\\ \text{si}\quad\sqrt[3]{e^2}+\sqrt[3]{f^2}=1 & \text{card}\,(\mathrm{S})=3\\ \text{si}\quad\sqrt[3]{e^2}+\sqrt[3]{f^2}<1 & \text{card}\,(\mathrm{S})=4\end{cases}}\ \text{(ix)}$$

Remarques sur les cas particuliers

Dans les 3 cas particuliers examinés précédemment l'hyperbole est "dégénérée" et ramenée à ses asymptotes.
On remarquera que le cas $\alpha=0$ (voir vii) satisfait à (ix) car $f=0$ et $e>1$.
Pour le cas $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (voir vi), il satisfait à (ix) si on convient que pour $f=1$ la solution $\frac{\pi}{2}$ est "double" car le point correspondant appartient aux deux droites.
De même pour le cas $a=b$ (voir viii), il satisfait à (ix) si on convient que pour $e=1$ la solution π est "double" car le point correspondant appartient aux deux droites.

Une conclusion plus visuelle

L'astroïde **A** inscrite dans **C** dont les points de rebroussement sont sur les axes a pour équation :

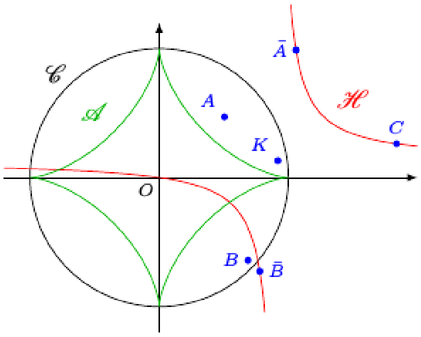
$$\mathrm{A}:\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1$$

Les conditions apparaissant dans la conclusion (ix) situent le point *K* par rapport à *A*.
On obtient ainsi le résultat suivant :

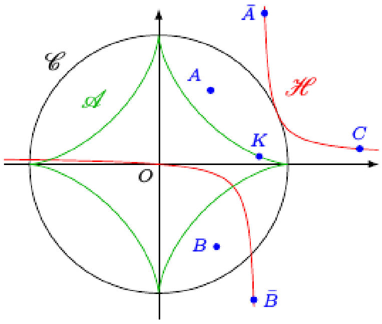
soit *C* le bord du billard et O son centre ; soient $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les images par l'inversion unitaire de pôle *O* des billes *A* et *B* ; soit *K* le milieu de $[\bar{A}\,\bar{B}]$; et soit A l'astroïde inscrite dans *C* dont les points de rebroussement sont sur les bissectrices des droites (OA) et (OB)

- le problème comporte 2 solutions si le point *K* est situé à l'extérieur de *A* ;
- le problème comporte 3 solutions si le point *K* est situé sur *A* ;
- le problème comporte 4 solutions si le point *K* est situé à l'intérieur de *A*.

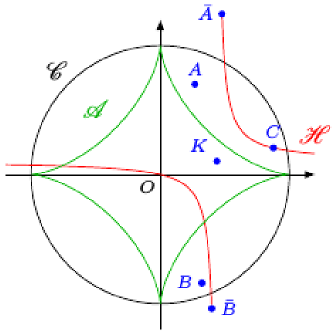
retour au sommaire



cas à 2 solutions



cas à 3 solutions



cas à 4 solutions

Calculabilité et traçabilité des solutions

Nous nous plaçons dans cette section en dehors des cas particuliers, ce qui signifie que *e* et *f* sont non nuls.

Expression des solutions

D'après (iii) et (iv), on a : $M(x, y) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y(x-e) = xf \end{cases}$

Comme $e \times f \neq 0$, $(x-e)$ ne peut être nul et en multipliant la première équation par $(x-e)^2$, on obtient :

$$\boxed{M(x, y) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-e)^2 + x^2 f^2 - (x-e)^2 = 0 \\ y(x-e) = xf \end{cases}} \text{(x)}$$

L'équation polynomiale en *x* étant du quatrième degré, elle est soluble par radicaux.

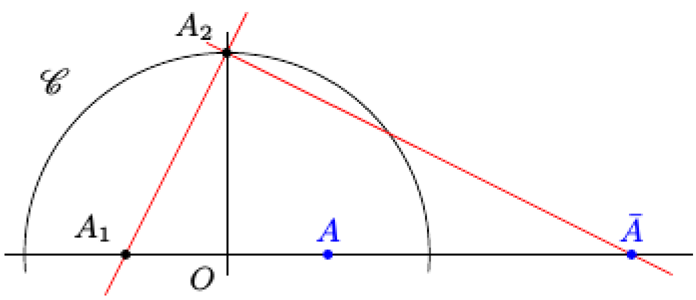
D'où le résultat :

Les coordonnées des solutions du problème peuvent être exprimées en valeur exacte.

Construction du point C

Le point $\bar{A}$ est entièrement défini par le fait que $O A \bar{A}$ sont alignés dans cet ordre et $OA \times O\bar{A} = 1$.

Rappelons que dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur issue de l'angle droit est égale au produit des projetés des côtés sur l'hypoténuse.



En considérant le point A_1 symétrique de *A* par rapport à *O* et un point A_2 à l'intersection de C et de la médiatrice de $[AA_1]$, le point $\bar{A}$ se trouvent par conséquent à l'intersection de la droite (OA) et de la perpendiculaire en A_2 à la droite (A_1A_2) $(A_1 A_2)$.

On construit ainsi à la règle et au compas les points $\bar{A}$ et $\bar{B}$, puis le point *K* milieu de $[\bar{A}\bar{B}]$ et enfin le point C.

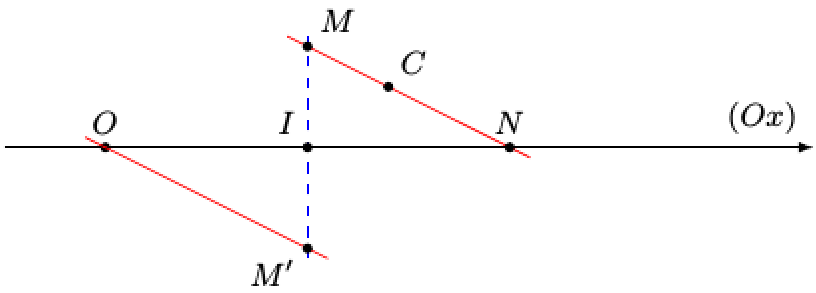
Une construction de H point par point

H a été défini en (iii) par $\mathcal{H}=\left\{M\in\mathcal{P};\ \overrightarrow{MC} \text{ et } \overrightarrow{OS_{(Ox)}(M)} \text{ colinéaires}\right\}$ où (Ox) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AOB}$.

<u>Si</u> $M\in\mathcal{H}$, alors (OM') // (CM) en posant $M'=S_{(Ox)}(M)$

Remarquons que la droite (CM) ne peut être parallèle à (Ox) car alors on aurait $M'\in(Ox)$, et donc $M\in(Ox)$, et donc $C\in(Ox)$. Ce qui est exclu puisque $f\neq 0$.

Soit N le point d'intersection de (CM) et (Ox) et I le milieu de $[MM']$.



La symétrie de centre I transforme M en M', et donc transforme la droite (MN), alias (MC), en une parallèle passant par M', c'est à dire en (OM').
Comme cette symétrie laisse (Ox) globalement invariante, elle transforme $(MN)\cap(Ox)$ en $(OM')\cap(Ox)$, et donc N en O.
On en déduit que I est le milieu de $[ON]$ et que donc (MM') est la médiatrice de $[ON]$.

<u>Réciproquement</u>, soit N un point de (Ox), différent du projeté de C, et M le point d'intersection de la médiatrice de $[ON]$ et de la droite (CN)
le point $M'=S_{(Ox)}(M)$ est tel que $OMNM'$ est un losange puisque $[ON]$ et $[MM']$ sont respectivement médiateur l'un de l'autre
donc (OM') // (MN) et comme $(MN)=(MC)$ on en déduit que (OM') // (MC), et donc que $M\in\mathcal{H}$.

Après avoir construit les points $\bar{A}$, $\bar{B}$ et C, et la droite (Ox), on peut construite $\mathcal{H}$ point par point en déplaçant un point N sur (Ox), différent du projeté de C, et en construisant les points M intersection de (NC) et de la médiatrice de $[ON]$.

En affinant la construction à l'approche de C, on obtient une construction « par tâtonnement » des points solutions du problème.

Constructibilité des solutions à la règle et au compas

Considérons le cas particulier suivant :

$$a=\frac{2\sqrt{33}}{5\left(\sqrt{33}+1\right)}\approx 0{,}341 \qquad b=\frac{2\sqrt{33}}{5\left(\sqrt{33}-1\right)}\approx 0{,}484 \qquad \alpha=\arccos\left(\frac{1}{10}\right)\approx 1{,}471$$

Les modules et le cosinus de l'argument s'exprimant avec les opérations élémentaires et des racines carrées d'entiers, les points A et B correspondant sont constructibles à la règle et au compas à partir des points $(0\,;0)$ et $(1;0)$, ainsi que la droite (Ox) et les points $\bar{A}$, $\bar{B}$, K et C .

La condition (i) traduisant le fait que l'argument t convient s'écrit aussi, en annulant la partie imaginaire :

retour au sommaire

$$(b+a)\cos(\alpha)\sin(t)+(b-a)\sin(\alpha)\cos(t)=a\,b\sin(2\,t)$$

Les valeurs particulières considérées ici donnent :

$$\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{33}\sqrt{3}}{10}\qquad b+a=\frac{33}{40}\qquad b-a=\frac{\sqrt{33}}{40}\qquad a\,b=\frac{33}{200}$$

En remplaçant, on obtient :

$$t\in \mathrm{E} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t)=\sin(2\,t) \Leftrightarrow \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(2\,t)$$

La résolution de cette équation dans $]-\pi, +\pi]$ donne $\mathrm{E}=\left\{-\frac{4\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{9}\right\}$

Si les solutions du problème posé étaient constructibles à la règle et au compas à partir des positions des billes A et B, ce cas particulier prouverait qu'il est possible de construire l'angle $\frac{\pi}{9}$ à la règle et au compas à partir des points $(0\,;0)$ et $(1;0)$. Construction réputée impossible (voir l'impossibilité de la trisection de l'angle $\frac{\pi}{3}$).

D'une façon générale, les points solutions ne sont pas constructibles à la règle et au compas.

retour au sommaire