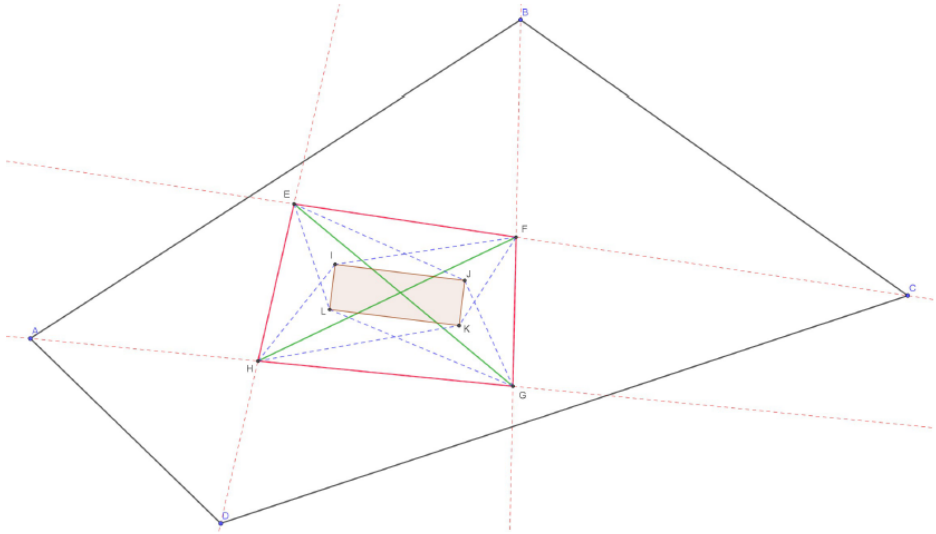
SOLUTION DU PROBLÈME PARU DANS LE PV 133

« C'est plié » : problème proposé par Damien Mégy

Rappelons l'énoncé :



Le quadrilatère ABCD ci-dessus est quelconque.

Les droites « rouges » sont les bissectrices des angles de ce quadrilatère. Leurs points d'intersection définissent un quadrilatère EFGH.

Les droites « bleues » sont des bissectrices des triangles définis par les segments diagonaux [EG] et [FH] et les quatre sommets du quadrilatère EFGH. Leurs intersections définissent un quadrilatère IJKL.

Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

Solution

La démonstration s'établit en deux étapes ; dans un premier temps, on montre que les points E, F, G et H sont cocycliques, puis que le quadrilatère IJKL est un rectangle.

Étape 1 : on montre que les points E, F, G et H sont cocycliques :

$$\left(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GH}\right)+\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BG}\right)=\pi\ (2\pi)\ [1]$$

et $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}\right)+\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CF}\right)+\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}\right)=-\pi\ (2\pi)\ [2]$

or $2\left(\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BG}\right)+\left(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)\right)=0\ (2\pi)$

et par conséquent $\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BG}\right)+\left(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=0\ (\pi)\ [3]$

Par conséquent, par « différence » de [1] et [2] et utilisation de [3] , on obtient :

$$\left(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GH}\right)-\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}\right)=0\ (\pi)$$

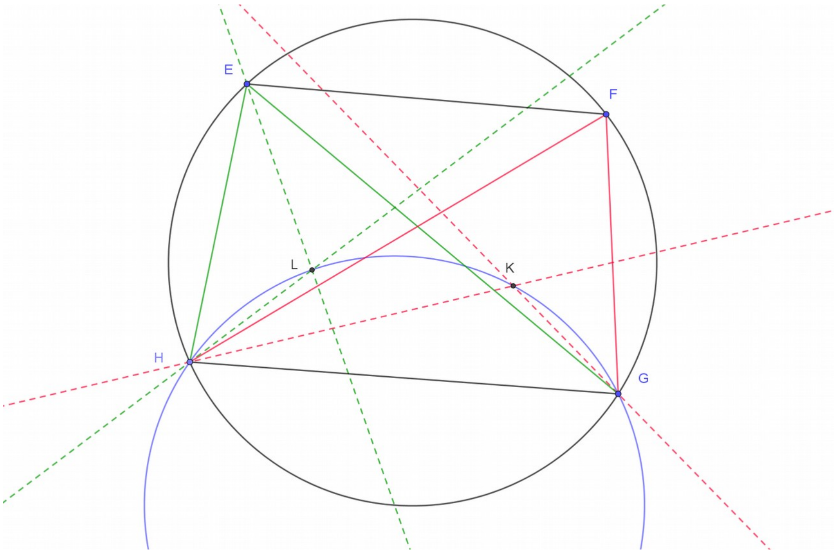
ce qui montre que les points E, F, G et H sont cocycliques

Étape 2 : montrons que IJKL est un rectangle.

Étape 2.1 : on montre que les points G, H, L et K sont cocycliques.

On considère la figure ci dessous, « extraite » de la figure de départ ;

retour au sommaire



dans le triangle LHG :

$$\left(\overrightarrow{LH},\overrightarrow{LG}\right) + \left(\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HL}\right) + \left(\overrightarrow{GL},\overrightarrow{GH}\right) = \pi \ (2\pi)$$

donc 2($\left(\overrightarrow{LH},\overrightarrow{LG}\right) + \left(\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HL}\right) + \left(\overrightarrow{GL},\overrightarrow{GH}\right)$) = 0 (2π)

Dans le triangle EHG,

$$\left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EG}\right) + 2\left(\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HL}\right) + 2\left(\overrightarrow{GL},\overrightarrow{GH}\right)\ ) = \pi \ (2\pi)$$

On déduit des deux relations précédentes que $\left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EG}\right) = \pi + 2\left(\overrightarrow{LH},\overrightarrow{LG}\right) \ (2\pi)$, soit :

$$\left(\overrightarrow{LH},\overrightarrow{LG}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EG}\right) + \frac{\pi}{2} \ (\pi)$$

En considérant le triangle FHG, on peut montrer de même que :

$$\left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KG}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FG}\right) + \frac{\pi}{2} \ (\pi)$$

D'après la question précédente on sait que les points E, F, G et H sont cocycliques ; ce qui se traduit par :

$$\left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FG}\right) \ (\pi)$$

et par conséquent $\left(\overrightarrow{LH},\overrightarrow{LG}\right) = \left(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KG}\right) \ (\pi)$, ce qui signifie que les points G, H, L et K sont également cocycliques.

Étape 2.2 : On montrerait de même que L, I, E et H sont cocycliques, de même que E, I, J et F ou encore F, J, K et G.

Étape 2.3 :Une décomposition de l'angle $\left(\overrightarrow{LK},\overrightarrow{LI}\right)$ va permettre de montrer qu'il est droit.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{LK},\overrightarrow{LI}\right) &= \left(\overrightarrow{LK},\overrightarrow{LH}\right) + \left(\overrightarrow{LH},\overrightarrow{LI}\right) \ (2\pi) \\ &= \left(\overrightarrow{GK},\overrightarrow{GH}\right) + \left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EI}\right) \ (2\pi) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GH}\right) + \left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EF}\right)\right) (2\pi)\end{aligned}$$

Or les points E, F, G et H sont cocycliques, donc $\left(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GH}\right) + \left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EF}\right) = \pi \ (2\pi)$ et par conséquent

$$\left(\overrightarrow{LK},\overrightarrow{LI}\right) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$

On montrerait de même que les autres angles du quadrilatère IJKL sont droits.

retour au sommaire

SOLUTION DU PROBLÈME n°134

Rappel de l'énoncé : On se donne une suite de n entiers u_1, u_2, … , u_n. On affirme que l'on peut trouver k termes consécutifs de cette suite, dont la somme est divisible par n.
Vrai ou faux ?

La proposition est vraie. La solution est une illustration du « principe des tiroirs ». Voici la solution, proposée par Jacques Choné.

Considérons les n entiers u_1, u_1+u_2, $u_1+u_2+u_3$, …, $u_1+u_2+u_3+...u_n$.
Si l'un d'eux est divisible par n, le résultat est acquis.
Sinon, lorsqu'on les divise par n, comme il n'y a que n-1 restes non nuls possibles, nécessairement deux d'entre eux ont le même.
Le résultat est alors acquis en considérant la différence de ces deux nombres.

SOLUTION DU SOPHISME DU PV134

L'erreur n'est ni dans l'initianisation (évident), ni dans l'hérédité ! En effet, si vous placez sur une feuille des points alignés, un point supplémentaire ne peut pas être aligné avec tous les points sauf un ! Du moins presque. Car l'hérédité n'est pas fausse en elle-même, mais elle n'est valable qu'à partir d'un certain rang. En effet, pour pouvoir dire « A_1 est sur la droite formée par les points de A_2 à A_n », il faut que « les points A_2 à A_n » soit un ensemble comprenant au moins deux points, pour définir une droite ! Il faut donc que n soit au moins égal à 3. En dessous, l'hérédité ne marche plus ; la preuve : deux points sont toujours alignés, trois ne le sont pas.
Ainsi, le problème de cette démonstration vient du raccord entre hérédité et initialisation : pour que la démonstration soit juste, comme l'hérédité est vraie à partie de n = 3, on doit absolument initialiser la démonstration avec n = 3, ce qui est évidemment impossible !

Ce sophisme était tiré de http://maths.amateurs.fr

PROBLÈME DU TRIMESTRE (n°135)

Problème proposé par Jacques Choné.

Soient a et b deux nombres entiers tels que $1 \leq a \leq b$.
On choisit, indépendamment sur un segment, a points que l'on étiquette chacun par la lettre A, puis b points que l'on étiquette par la lettre B. Les points B délimitent ainsi b+1 segments.
Quelle est la probabilité que, sur chacun de ces segments, figure au plus un point A ?

Le responsable de cette rubrique est philippe.fevotte@wanadoo.fr.
Lui envoyer vos propositions de solutions à ces deux problèmes (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.