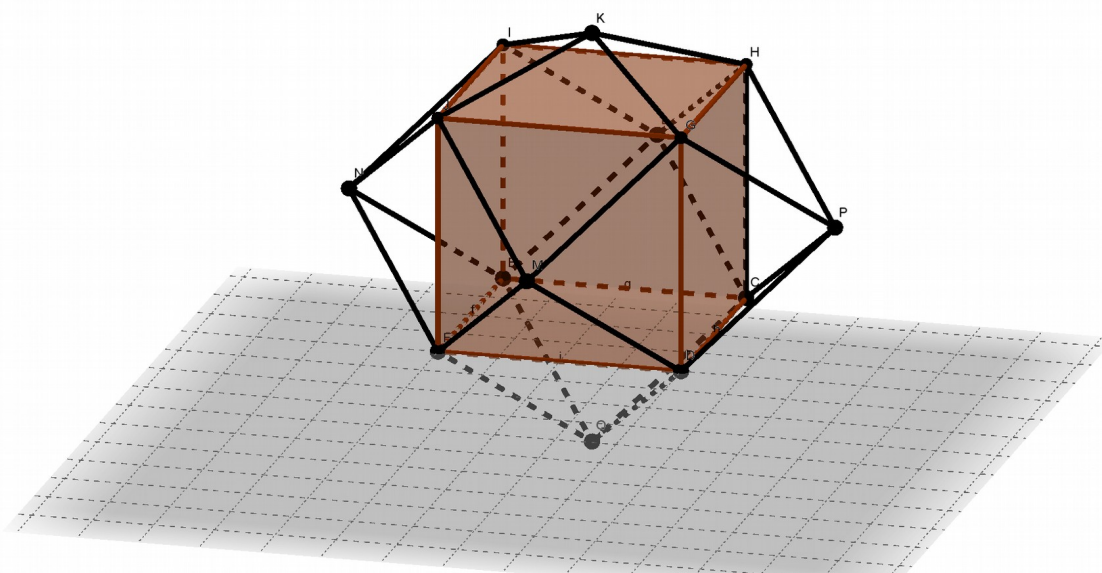


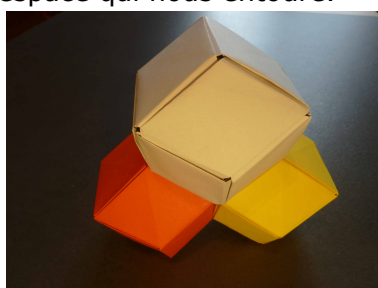
LE DODÉCAÈDRE RHOMBIQUE

par Walter Nurdin

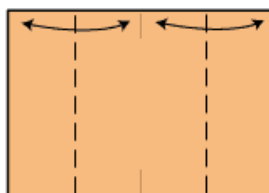
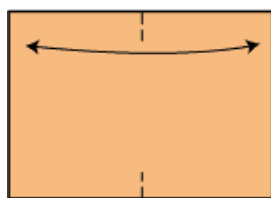
Le dodécaèdre rhombique, polyèdre convexe, comporte comme son nom le précise 12 faces qui sont des « rhombes », ancien mot pour dire losange. Chaque arête est commune à 2 losanges. Pour obtenir le nombre d'arêtes il suffit de diviser par 2 les 12×4 arêtes de toutes les faces. On obtient donc 24 arêtes. La formule d'Euler permet d'obtenir le nombre de sommets : $S = A + 2 - F = 24 - 2 - 12 = 14$. On obtient un dodécaèdre rhombique en apposant sur chaque face d'un cube une pyramide à base carrée dont la hauteur est la moitié de l'arête du cube. Par cette observation on comprend, en utilisant le théorème de Pythagore, que le rapport des diagonales (grande diagonale/petite diagonale) des losanges doit être égal à $\sqrt{2}$ ce qui fixera les angles au sommet du dodécaèdre rhombique.



Le dodécaèdre rhombique pave l'espace qui nous entoure.



Nick Robinson, origamiste anglais, propose une construction modulaire d'un dodécaèdre rhombique en partant d'une feuille A6. Pour obtenir cette feuille on prend une feuille A4 que l'on plie en deux dans le sens de la longueur, que l'on coupe on obtient alors deux feuilles A5. On itère la procédure pour obtenir avec cette feuille A5 deux feuilles A6. Il en faut 12. La feuille A4 est dans le rapport $\sqrt{2}$. Lorsqu'on plie une feuille A4 dans le sens de la longueur on obtient une feuille qui est dans le même rapport grâce au fait que $\sqrt{2}$ a son inverse qui vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il en est de même pour la feuille A6. Ce rapport particulier va être utilisé pour obtenir une condition essentielle de la construction : obtenir des losanges identiques dont les rapports des diagonales sont $\sqrt{2}$. Voici la proposition de Nick Robinson.

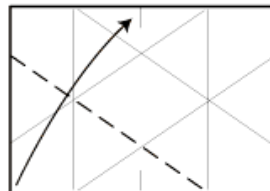
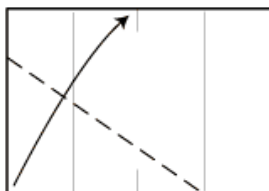


Les tirets indiquent que l'on fait des plis « vallées ».

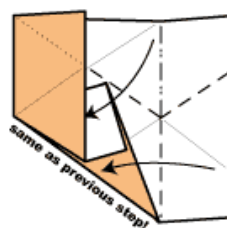
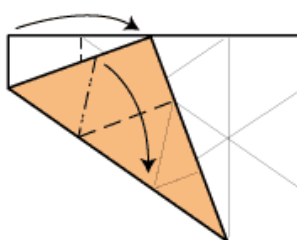
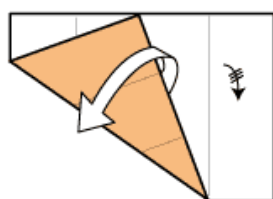
A4 rhombic Unit

c Nick Robinson

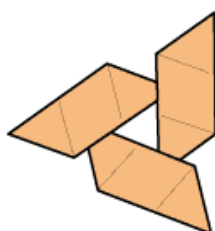
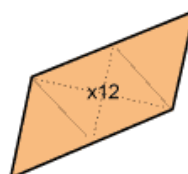
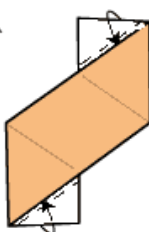
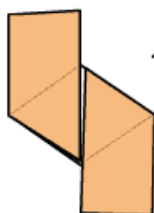
On retourne la feuille.



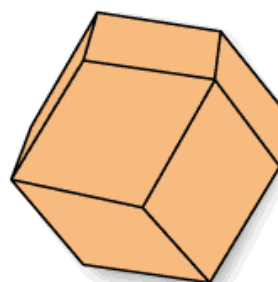
Observez les plis. On réalise ce pli dans tous les sens, donc 4 fois.



Les plis montagnes sont « tîret, point, tîret ... »

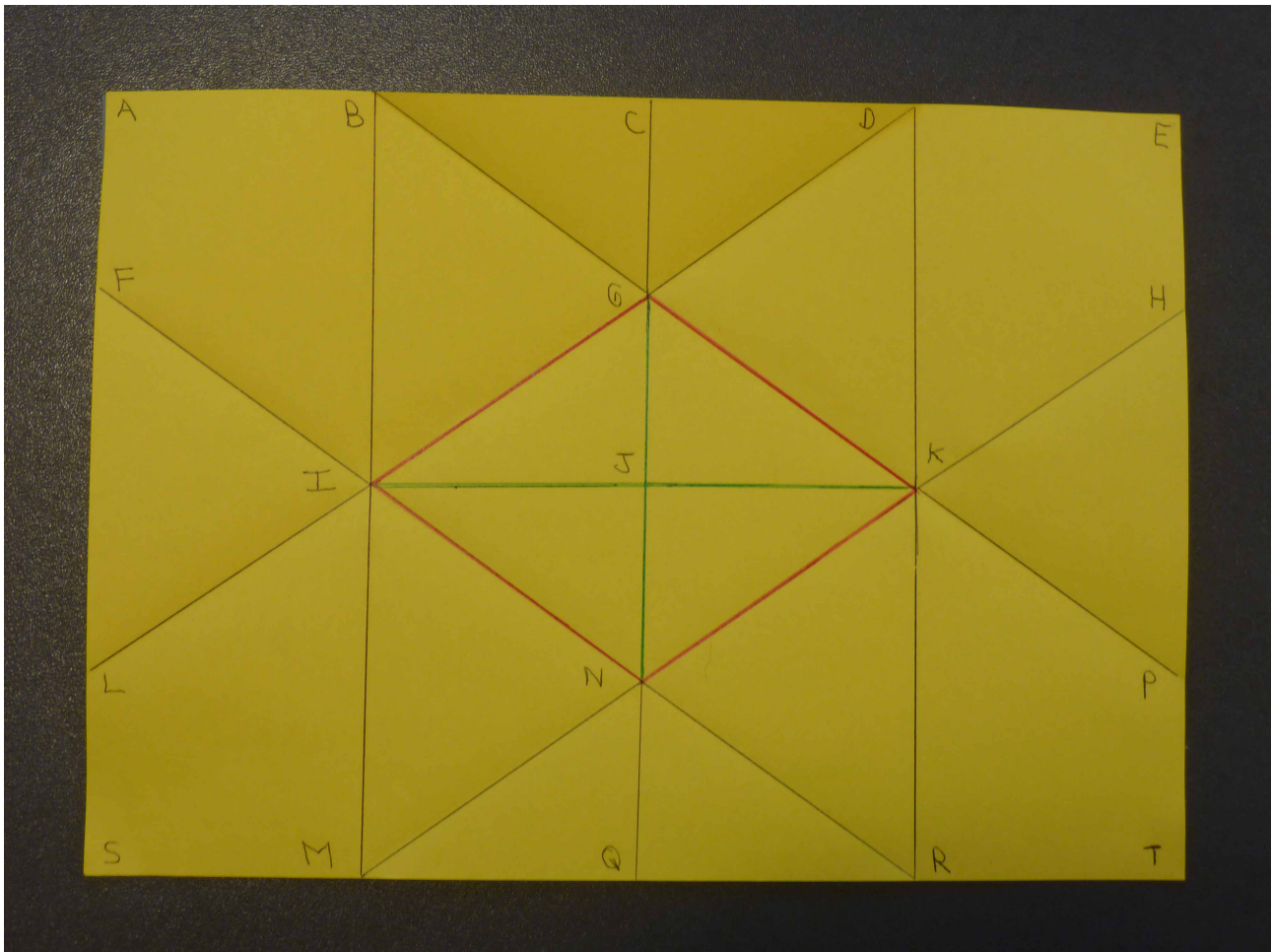


Many combinations are possible adding either or both diagonal creases.



Pour construire le dodécaèdre il faut introduire les triangles dans les « poches » du losange.

En dépliant le module on obtient la feuille ci-dessous. En rouge, le quadrilatère (INKG) qui constituera une face du dodécaèdre. Si l'on veut justifier la construction il faut démontrer que le pliage permet d'obtenir comme face un losange, et de plus, que ce losange a ses diagonales dans le rapport $\sqrt{2}$. Ainsi les angles aux sommets seront respectés.



Lorsqu'on réalise le premier pli et donc que l'on pose S sur C c'est une symétrie axiale que l'on met en œuvre. (FR) est le pli obtenu. S, I et C sont par construction alignés et I, toujours par construction, est le milieu de [SC]. Donc I est également le milieu de [BM] en raison du parallélisme de (AE) et de (ST) .

Le pliage « symétrie » oblige que $\widehat{SIR} = \frac{\pi}{2}$

(IM) est ainsi la hauteur issue de l'angle droit du triangle rectangle (SIR). On en déduit que $IM^2 = MS \times MR$.

On connaît $IM = \frac{1}{2} l$ et $SM = \frac{1}{4} L$, on en déduit MR par l'égalité précédente : $MR = \frac{L}{4}$. Erreur
 $MR = L/2$

R est donc sur le pli qui partage en 4 parties égales la longueur de la feuille A6.

Toujours en raison du parallélisme de (BM), (CQ), (DR) et en considérant le triangle (MIR) on peut en déduire les égalités $IN = NR = \frac{1}{4} \times \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)} \times L$.

Puisqu'on reproduit exactement le même pliage pour les autres côtés du quadrilatère (INKG) on va d'une part obtenir des plis qui vont revenir sur I, K, G et N et d'autre part obtenir une égalité des longueurs des 4 côtés. Le quadrilatère (INKG) est donc un losange. On sait qu'il existe une infinité de losanges ayant une longueur de côtés identique. Les dimensions des diagonales fixeront ce losange.

Le quadrilatère (MIKR), par construction non croisé, a deux côtés [IM] et [KR] égaux et parallèles, c'est donc un parallélogramme ayant au moins deux angles droits : c'est donc un rectangle. On obtient ainsi $IK = \frac{1}{2} L$.

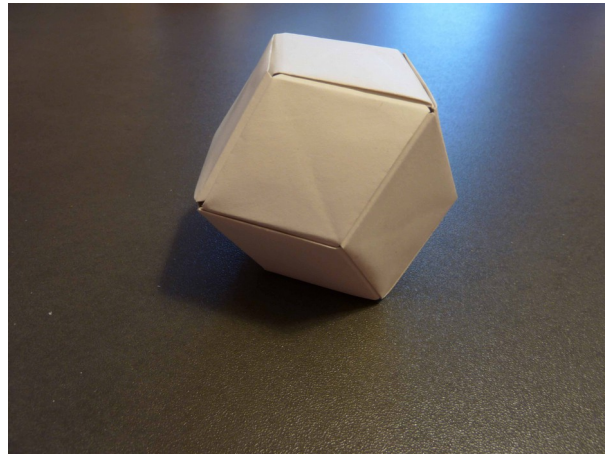
Q, N, J, G et C sont alignés ; de plus G est le milieu de [CJ] et N est le milieu de [JQ]. Ces affirmations se démontrent formellement en considérant les triangles (IMR) et (IKR) et (BKD) et (BIK) et les parallélismes de (CJ) et de (JQ).

On obtient alors que $GJ=JN= \frac{1}{4} \times l$. Donc $GN=\frac{1}{2} \times l$.

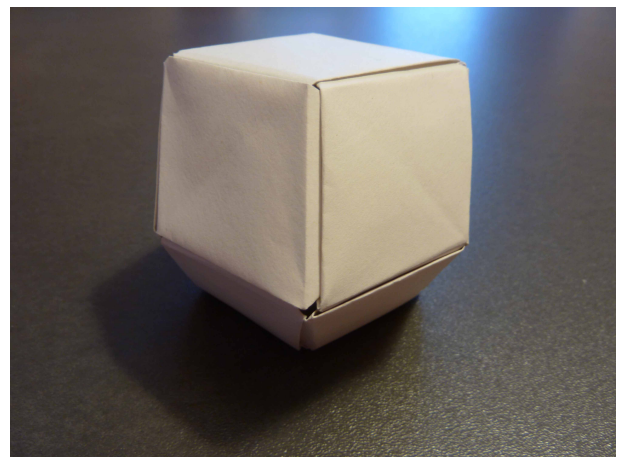
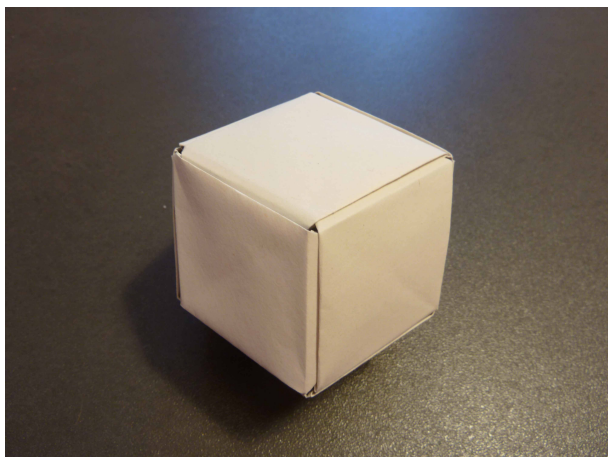
Puisque l et L sont dans un rapport de $\sqrt{2}$ il en est de même pour GN et IK .

La construction est donc validée pour obtenir un losange qui va permettre de construire le dodécaèdre rhombique.

Le voici.



La construction faite on pourra observer une particularité du dodécaèdre rhombique. Certes on n'obtiendra pas le prix de « Best illusion of the year contest »⁵ mais au moins des élèves de fin de cycle 3 vont pouvoir le réaliser. Les illusions de Kokichi Sugihara⁶, qui lui a obtenu le premier prix en 2010 et 2013, sont, elles, particulièrement stupéfiantes et méritent un détour sur votre moteur de recherche préféré.



Vous choisissez un angle particulier de prise de vue et voici le résultat.
On a construit un ... cube !

L'ombre permet certes de deviner qu'il y a une tromperie, cependant l'illusion est bien là. Lorsqu'on change légèrement le point de vue précédent on perd bien évidemment l'effet.

⁵ <http://illusionoftheyear.com/>

⁶ <http://illusionoftheyear.com/cat/top-10-finalists/2010/>