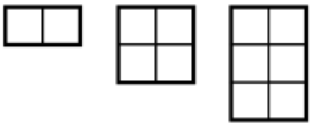
MATHS & ARTS

DEVANT UNE BOULANGERIE MOSELLANE (*Partie 2)*

Cette partie est la suite de l'étude commencée par François Drouin dans le Petit Vert n°134.

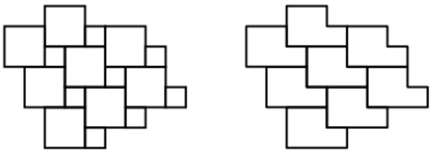


Trois types de dalles sont utilisées, correspondant à des rectangles 1×2, 2×2 et 3×2.

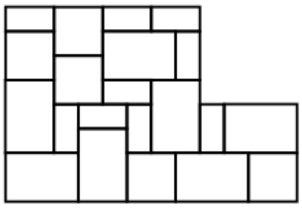
Le sol est recouvert sans ligne de fracture et sans régularité apparente.

Comment recouvrir le plan avec ces trois types de pièces, sans que n'apparaissent de ligne de fracture, sans placer les pièces au hasard, et sans que l'algorithme utilisé ne se remarque immédiatement ?

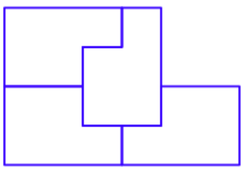
Le plan peut être pavé par un assemblage de deux carrés, comme cela est visible sur le mur d'une maison à Nancy.

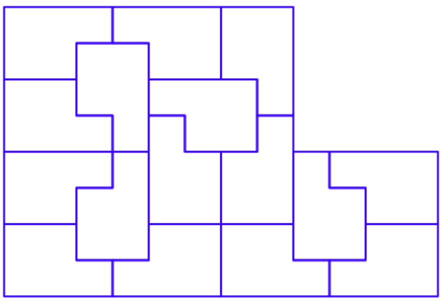


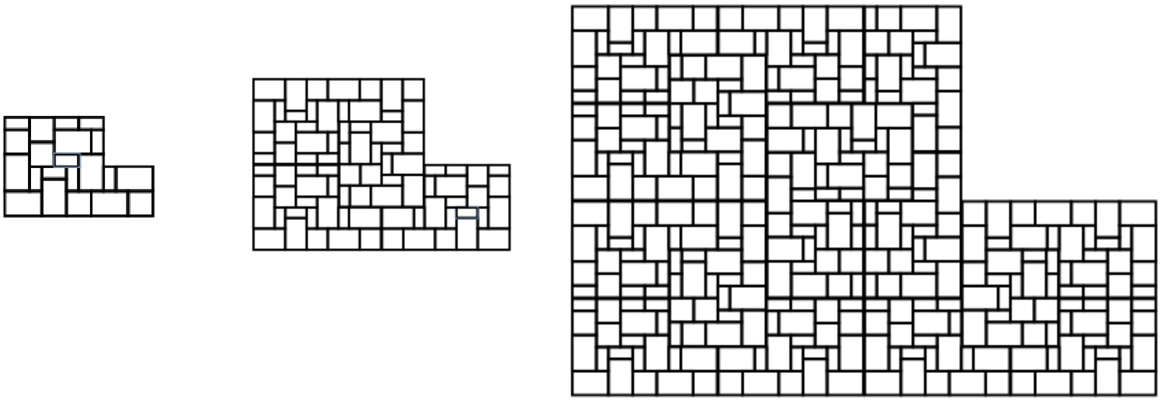
Aucune ligne de fracture n'apparait.



Le « P » des Pentaminos peut être construit à l'aide d'un carré 8×8 et d'un carré 4×4. Ce « P » est une « Rep figure », elle peut recouvrir ses agrandissements à une échelle quelconque. Une première piste est d'utiliser un extrait de pavage de cette pièce à différentes échelles.



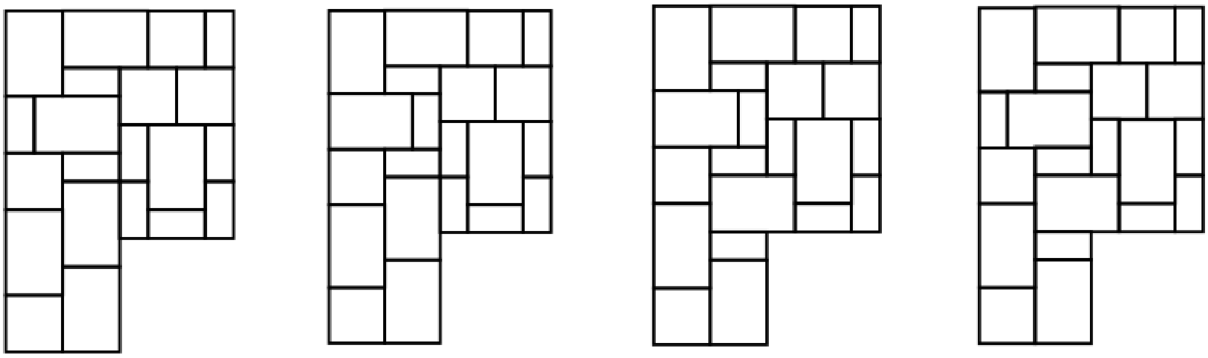


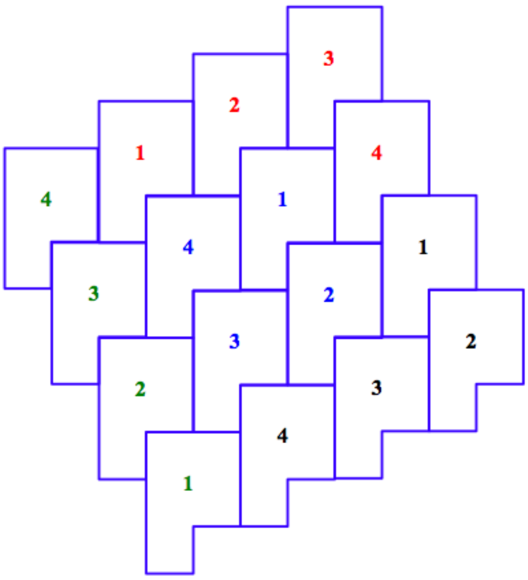


L'utilisation d'une partie du motif ne laisse pas apparaitre de régularité. Il faudra cependant veiller à choisir une zone ne laissant pas visible de ligne de fracture.

Une autre possibilité

Voici quatre recouvrements non séparables d'une même zone en forme de « P ». Après avoir posé le recouvrement **1**, je l'entoure en spirale des recouvrements **2**, **3**, **4**, **1**, **2**, **3, 4** etc.



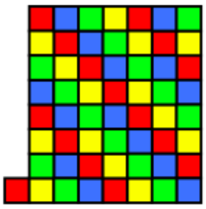


La spirale est formée des pièces **1, 2, 3, 4**, **1, 2, 3, 4**, **1, 2, 3, 4**, **1, 2, 3, 4,** etc.

	1	2	3	4	1	2	3
	4	1	2	3	4	1	4
	3	4	1	2	3	2	1
	2	3	4	1	4	3	2
	1	2	3	2	1	4	3
	4	1	4	3	2	1	4
	3	3	1	4	3	2	1
1	4	3	2	1	4	3	2

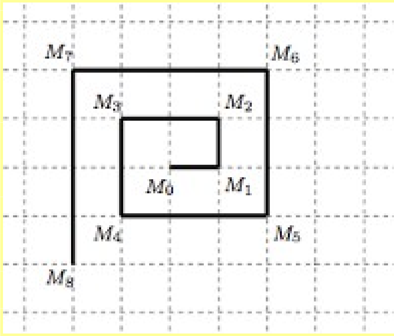
Apparaissent une diagonale formée de 1 et une autre formée d'une alternance de 1 et de 3. Est-ce toujours vrai ?

retour au sommaire



Le coloriage des cases fait apparaitre des alignements de cases rouges (cases 1) et vertes (cases 3).
Des alignements commencent également à apparaitre pour les cases jaunes (cases 4) et bleues (cases 2).

L'étude des nombres rencontrés par les deux diagonales est voisine de la demande d'un exercice préparatoire au Rallye Mathématique de Franche Comté organisé en 2009 dans l'académie de Besançon : « Carrés décalés ».



Sur un quadrillage à mailles carrées, on construit une spirale comme l'indique la figure ci-contre. Chacun des points obtenus est repéré par ses coordonnées : M_0 (0;0), M_1 (1;0), M_2 (1;1)...

Quelles sont les coordonnées de M_{2009} ?

Voici la solution proposée.

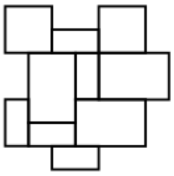
En observant la spirale, l'élève remarque que 1, 5, 9 et 13 ont pour reste 1 dans la division euclidienne par 4, et que M_5, M_9 et M_{13} sont sur la demi-droite [M_1, M_5]. Or 2009 = 502x4 + 1, donc le reste de la division de 2009 par 4 est 1, et le point M_{2009} est sur la demi-droite [M_1M_5).

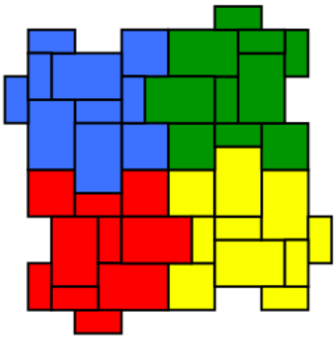
M_1	M_5	M_9	M_{13}
1 = 0x4 +1	5 = 1x4 + 1	9 = 2x4 + 1	13 = 3x4 +1
x_1 = 1	x_5 = 2	x_9 = 3	x_{13} = 4
y_1 = 0	y_2 = -1	y_9 = -2	y_{13} = -3

Pour déterminer les coordonnées de M_{2009} dans le repère orthonormé tel que M_0(0,0), M_1(1,0) et M_2(1,1), l'élève peut remarquer que les coordonnées des points (x_n ,y_n) des points M_n pour n appartenant à {1 ; 5 ; 9 ; 13} s'expriment en fonction du quotient q de n par 4 par $x_n = q+1$ et $y_n = -q$. Sachant que 2009 = 502x4+1, il pourra alors écrire que x_{2009} = 503 et y_{2009} =-502.

Il peut aussi dénombrer le nombre de points à partir de M_1 jusqu'à M_{2009} , ce qui revient à compter le nombre de diagonales du carré unité du quadrillage, comme dans « fol écureuil ».
En effet, l'élève remarque que 5 = 1x4 + 1, 9 = 2x4 +1, 13 = 3x4 + 1 et que M_5, M_9 et M_{13} sont respectivement à 1, 2 et 3 diagonales du point M_1.
Or 2009 = 502x4 + 1, donc le reste de la division de 2009 par 4 est 1, et le point M_{2009} est à 502 diagonales de M_1, donc x_{2009} = 502 + x1 = 503 et y_{2009} = -502 + y1 = -502.

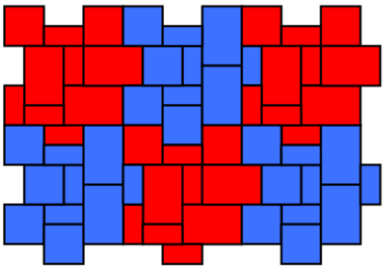
retour au sommaire

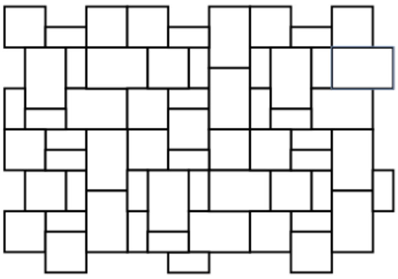




En faisant tourner ce motif de pavage, un nouveau motif apparait. Il permet également de paver le plan et pourra être lui aussi tourné pour obtenir un nouveau motif paveur. Le processus peut se poursuivre.

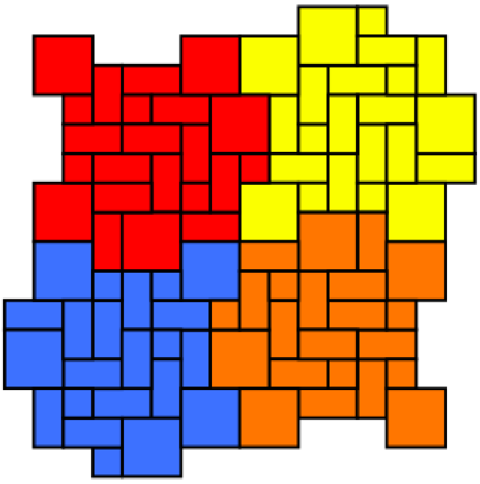
Les quatre carrés centraux sont reconnaissables, le motif sera peut-être repéré.

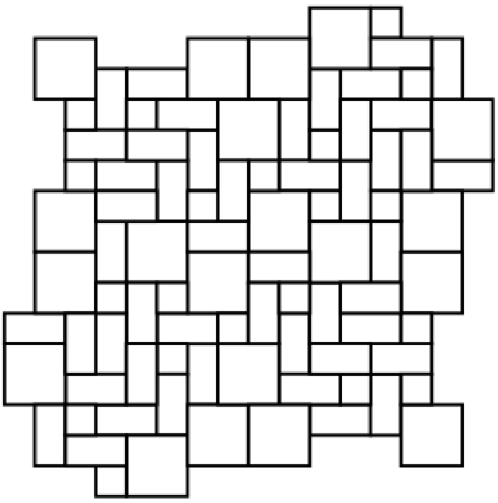




Une alternance de deux dispositions rend le motif de base plus difficile à retrouver.

Avec les pièces du carrelage COMBI





Des rotations de cette autre disposition des pièces formant un carreau de COMBI ne montrent pas de ligne de fracture et rendent peu reconnaissable le motif de base.
Le nouveau motif permet également de paver le plan et pourra être lui aussi tourné pour obtenir un nouveau motif paveur. Le processus peut se poursuivre.

Avec des élèves

Faisons confiance à leur créativité en classe ou en dehors de la classe : ils sauront sans nul doute imaginer d’autres procédures.

retour au sommaire