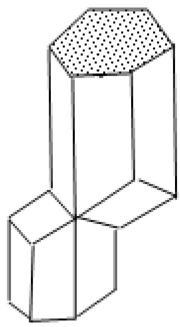
ÉTUDE MATHÉMATIQUE

CE QUE NOUS APPRENNENT LES ABEILLES

Cet article reprend en grande partie le compte rendu d'un atelier animé par Ginette MISON et René GAUTHIER lors des journées nationales de l'APMEP à Gérardmer en 1999.

1. LE PROBLÈME DES ALVÉOLES

Les alvéoles des abeilles sont construites en cire par les "abeilles maçonnes".
Elles permettent de stocker le pollen et le miel, de loger les œufs et les larves (le couvain).
Le gâteau de cire est constitué par des prismes juxtaposés, d'axe horizontal.
Le couvercle est garni de cire.



• La section droite de chacun des prismes est un hexagone régulier dont le côté mesure environ 3 mm. La profondeur de l'un des prismes est de 11,5 mm environ.

> **Première question** : *pourquoi des hexagones* ?
> L'hexagone régulier est le moyen de pavage le plus économique : pour une même surface, il offre le périmètre le plus petit.

• Les prismes ne se raccordent pas par une face hexagonale : chaque cellule est adossée à trois autres cellules au moyen d'une surface concave formée de trois losanges.
Ces losanges ont des angles de 109° et 71° environ.

> **Seconde question**: *pourquoi ces losanges* ?
> Pour un même volume, le raccordement par trois losanges minimise la surface de raccordement des prismes.

Dès l'Antiquité, on a remarqué la section hexagonale des alvéoles.

Aristote (*Histoire des animaux*) en -400 av. JC, Pline l'Ancien (*Histoire naturelle*) et Pappus (*Collections)* qui fut, semble-t-il, le premier à apporter une interprétation : cette forme des alvéoles est motivée par le souci de "paver" le plan et de faire des économies de cire pour une même surface recouverte.
Par contre, il faut attendre le XVIIIe siècle pour que la forme des losanges de raccordement soit étudiée de manière précise.
Maraldi (neveu de Cassini) détermina expérimentalement l'angle de 109°28' de ces losanges. König traita la question par le calcul et trouva 109°26′. Mais ce calcul était faux, comme le prouva Mac Laurin en 1743, confirmant le résultat de Maradi. D'autres études ont été faites par Buffon, Réaumur, Huber, Lhuillier, Lalanne, ... avec des interprétations différentes.

Pendant longtemps, les scientifiques ne furent pas tous d'accord à propos de l'interprétation des hexagones et des losanges. Pourtant, Fontenelle (1657-1757) écrivait : *« Les abeilles, par inspiration et de par la volonté divine, sont capables d'appliquer aveuglément les mathématiques les plus raffinées ».*

En 1964, un mathématicien hongrois, Fejes Toth, a démontré que si le fond de raccordement des prismes n'est pas formé de trois losanges mais de deux petits hexagones et de deux losanges, la quantité de cire utilisée pour ce raccordement et pour un même volume, est inférieure de 0,35% à ce qu'elle est avec les losanges.

2. LA SECTION des ALVÉOLES

Pavage du plan

Pour un polygone régulier convexe de n côtés, l'angle de deux côtés consécutifs est, en degrés,

$$\alpha = 180 - \frac{360}{n} \quad \text{avec } k \geq 3.$$

On peut accoler k polygones par un sommet à condition que

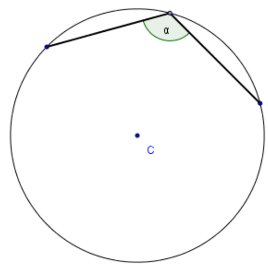
$$k \times \left(180 - \frac{360}{n}\right) = 360 \quad \text{avec } k \geq 3.$$

Soit $1 - \frac{2}{n} = \frac{2}{k}$; $\frac{2}{n} + \frac{2}{k} = 1$; soit $k = \frac{2n}{n-2}$

avec k >2 et n >2.

- n = 3 donne k=6 (6 triangles équilatéraux)
- n = 4 donne k=4 (4 carrés)
- n = 5 k n'est pas entier
- n = 6 donne k=3 (3 hexagones réguliers)
- n = 7 k n'est pas entier et k < 3 .
- C'est terminé !

Seuls des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers permettent ce pavage.



* nombre de côtés : n

* angle au centre : $\beta = \frac{360}{n}$

* angle de deux côtés consécutifs :

$$\alpha = 180 - \frac{360}{n}$$

Périmètre minimum pour la même aire

Examinons maintenant les périmètres de ces trois polygones réguliers en supposant que les aires soient égales : pour cela, l'aire S et le périmètre P s'exprimant en fonction du côté a, on peut sans peine exprimer P en fonction de S.

Triangle équilatéral (n=3)	Carré (n=4)	Hexagone régulier (n=6)
$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ et $P_3 = 3a$ On obtient P en fonction de S : $P_3 = \frac{6}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{S}$ soit $P_3 \approx 4{,}559\sqrt{S}$	$S = a^2$ et $P_4 = 4a$ On obtient alors $P_4 = 4\sqrt{S}$	$S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$ et $P_6 = 6a$ On obtient alors $P_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}\sqrt{S}$ soit $P_3 \approx 3{,}722\sqrt{S}$

Pour une même aire S, c'est l'hexagone régulier qui a le plus petit périmètre : en choisissant ce type de "pavage", l'abeille va donc faire "une économie de cire" autour des alvéoles...

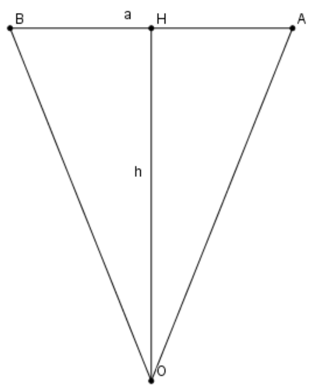
Généralisation

Pour une même aire, le périmètre du polygone régulier de n côtés diminue lorsque n augmente. Le cas de l'hexagone comparé au carré et au triangle équilatéral n'est qu'un cas particulier.

Le périmètre du polygone régulier est P = na (a est le côté)

Si AOB est un triangle "au centre", son aire est $\frac{ah}{2}$ avec OH = h

L'aire totale du polygone est donc $S = \frac{nah}{2} = \frac{Ph}{2}$ d'où $h = \frac{2S}{P}$.



retour au sommaire

Pour l'angle au centre on a $\beta=\frac{360}{n}$ et $\frac{\beta}{2}=\frac{180}{n}$ Aire$(AOB)=\frac{1}{2}OH.AB=\frac{ah}{2}$

Or $\frac{a}{2h} = \tan\left(\frac{180}{n}\right)$ d'où $h=\frac{a}{2\times\tan\frac{180}{n}}=\frac{P}{2n\times\tan\left(\frac{180}{n}\right)}$

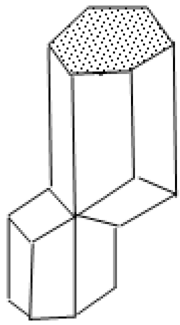
d'où P^2 en fonction de S et de n : $P^2 = 4n \times \tan(180/n) \times S$

soit $P = 2\sqrt{n\times\tan\frac{180}{n}}\times\sqrt{S}$.

On retrouve les valeurs de P pour n=3 , n=4 et n=6 .

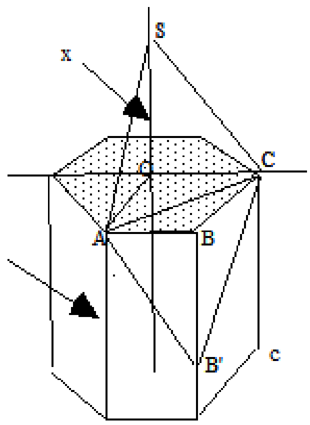
3. RACCORDEMENT DES ALVÉOLES

Les alvéoles, qui se présentent sous la forme de prismes d'axe horizontal, ne se raccordent pas par leur base hexagonale : chaque alvéole se raccorde avec trois autres par l'intermédiaire de trois losanges bien particuliers ayant un sommet en commun.
Si la forme hexagonale était connue et étudiée dès l'antiquité, les losanges n'ont fait l'objet d'étude que bien plus tard, au XVIII^e siècle.
L'hexagone de centre O, couvercle "naturel" du prisme, est remplacé par trois losanges de sommet commun S, situé sur l'axe.



Considérons seulement un **tiers du prisme**.
Plaçons le point B', sur une arête, tel que $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OS}$.
SAB'C est un losange qui "remplace" le losange OABC : c'est l'un des losanges de raccordement.
Soit **K** le tiers de prisme de *couvercle* naturel le losange OABC.
Soit **L** le tiers de prisme "tronqué" de *couvercle* le losange SAB'C.
Comparons leurs volumes et les aires de l'enveloppe.

*** Comparaison des volumes de K et L :**
Il est évident que ces volumes sont égaux : les deux tétraèdres B'ABC et SOAC ont le *même volume* (symétrie centrale qui échange A et C, S et B') ; le volume " coupé" est compensé par le volume "rajouté".



*** Comparaison des aires** : couvercle + surfaces latérales.
Le côté de l'hexagone : posons AB = BC = 1; d'où AC = √3.
Si h désigne la hauteur initiale du prisme non tronqué,
et si on pose x= OS = BB' on a :
$SA = SC = B'A = B'C = \sqrt{1+x^2}$, et $SB' = \sqrt{1+4x^2}$

Aire totale de K (2 rectangles + un losange) soit $2h+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aire totale de L (2 trapèzes + un losange) soit :

2h - x + Aire(SAB'C).

Aire (SAB'C) = $\frac{1}{2}\times SN'=\frac{1}{2}\sqrt{3+12x^2}$

D'où l'aire de L : S(x) = $2h-x+\frac{1}{2}\sqrt{3+12x^2}$ (Pour x=0 on retrouve $2h+\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Si on étudie la fonction $x \to S(x)$ on montre sans peine qu'elle est décroissante de x = 0 à $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$, pour devenir ensuite croissante. Le minimum de cette aire totale est $2h+\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui est inférieur à l'aire de K : les abeilles ont donc bien raison de choisir L et non K !

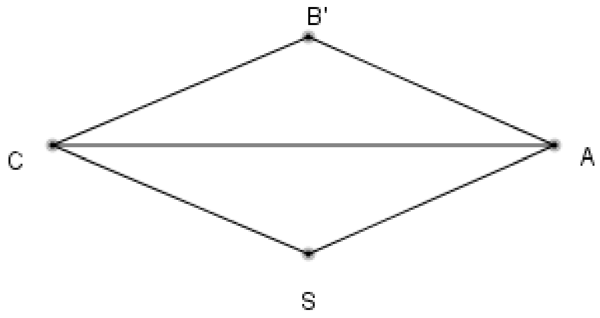
retour au sommaire

Les losanges de raccordement

Avec cette valeur de x, on a $SA=SC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $AC=\sqrt{3}$

Dans le triangle SAC, on trouve $\cos(\widehat{ASC})=-\frac{1}{3}$, soit $\widehat{ASC}$ ≈ **109,471°** valeur déjà trouvée par Mac Laurin en 1743.

Curieusement, c'est le même angle que l'on trouve entre deux liaisons [CH] dans la molécule de méthane CH_4 en utilisant sa représentation par un tétraèdre régulier dont C occuperait le centre de gravité et c'est aussi l'angle de deux faces latérales d'une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont équilatérales...



5. BIBLIOGRAPHIE (sûrement incomplète)

Curiosités géométriques, E. Fourrey, Vuibert, 1907.
Les abeilles, J. Gould et C. Gould, Univers des sciences, BELIN Pour la science
La vie des insectes, Grande encyclopédie de la Nature, Ed. Rencontres
Mathématiques et formes optimales, BELIN, 1986
Mémoire d'un biologiste, Max Frisch, BELIN, 1987
L'énigme des abeilles, R.Chauvin, Ed. du Rocher,1999
L'Abeille, Paillot et al., Ed. de Trevoux, 1949
La Hulotte, n°28-29 (Les abeilles et la ruche)
Les inventions de la nature, Y. Coineau et B. Kresling, Hachette
Travaux pratiques en terminale scientifique, IREM de Strasbourg, 1987
Activités géométriques au Lycée, IREM de Strasbourg, 1984
Polyèdres réguliers, GALION Thèmes, 1992
Faire des maths autrement, APMEP, Régionale de LYON
Article « **La danse des abeilles** », Pour la science n°202, 1994

ILS SE SONT INTERESSÉS AUX ABEILLES...

Les hexagones réguliers des alvéoles :
Aristote, *Histoire des animaux* (IVe siècle av. J-C)
Pline l'Ancien, *Histoire naturelle* (Ier siècle)
Pappus, *Collections*, (IVe siècle)

Les losanges de fermeture :
Maraldi, astronome à l'observatoire de Paris (1712)
Réaumur, *Histoire des insectes*
König, qui fait une erreur de calcul (1739)
Mac Laurin, qui corrige l'erreur de König (1743)
Buffon , *Discours sur la nature des animaux*
Huber, Lalanne, etc.

Dans le Petit Vert

Activité en classe de Valérian Sauton, « Les abeilles », Petit Vert n°126 de juin 2016, page 28 : http://www.apmeplorraine.fr/pv/PV126.pdf

Dans les bulletins de l'APMEP

Bulletin n°428 (1999), pages 403 à 408.
et https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA03003.pdf : en terminale S, annexe 1.

6. DANS NOS CLASSES (1)

Exemples d'activités possibles

Études de courbes.

Pavage du plan au moyen de polygones réguliers.

Étude de la fonction $x \rightarrow \dfrac{2x}{x-2}$ avec $x > 0$.

Calcul du périmètre d'un polygone régulier en fonction de n et de S.

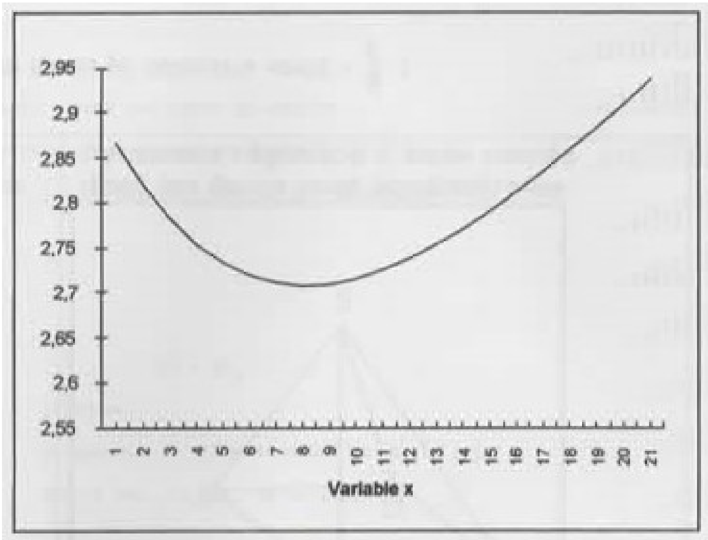
Étude plus ou moins précise de la fonction S : $x \rightarrow 2 - x + \frac{1}{2}\sqrt{3+12x^2}$ (ci-dessous).

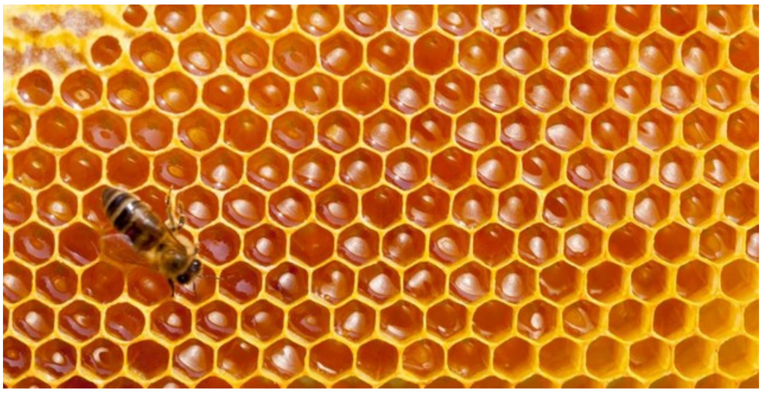
Calcul des angles des losanges de raccordement.

Dessin d'un "patron" d'alvéoles avec les losanges de raccordement.

Fonction S : $x \rightarrow 2 - x + \frac{1}{2}\sqrt{3+12x^2}$ **.** Le minimum est atteint pour x = soit environ 0, 353

x	S(x)
0	2,8660254
0,05	2,82034476
0,1	2,78317609
0,15	2,75415707
0,2	2,73273791
0,25	2,71824584
0,3	2,70995049
0,35	2,70711873
0,4	2,70905365
0,45	2,71511802
0,5	2,72474487
0,55	2,73743932
0,6	2,75277493
0,65	2,77038727
0,7	2,78996644
0,75	2,8112495
0,8	2,83401346
0,85	2,85806909
0,9	2,88325545
0,95	2,9094354
1	2,93649167



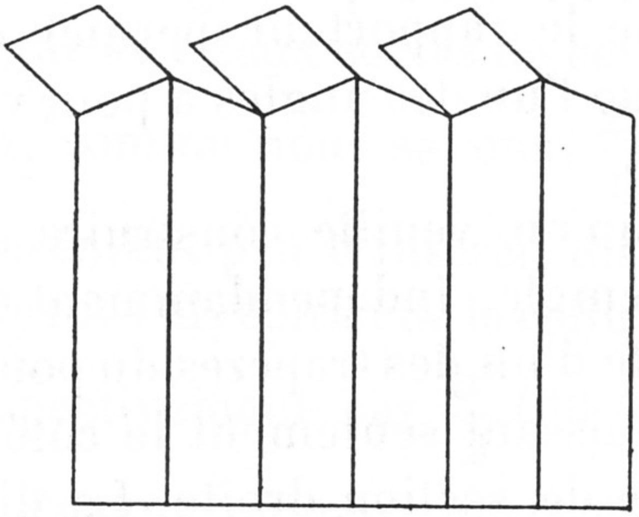


retour au sommaire

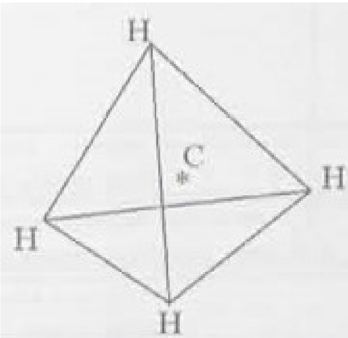
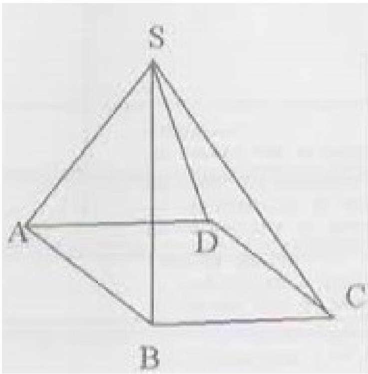
DANS NOS CLASSES (2)

Pour fabriquer un « patron » d'alvéole

Problèmes de dimensions et d'angles, en particulier pour les losanges de raccordement !



Où l'on retrouve l'angle des losanges dont le cosinus vaut $-\frac{1}{3}$ ...

Dans le tétraèdre régulier qui représente une molécule de méthane	**Pyramide régulière à base carrée dont les faces sont équilatérales**
 L'atome de carbone C est au centre de gravité du tétraèdre. Les angles $\widehat{HCH}$ ont tous pour cosinus $-\frac{1}{3}$	 La base est carrée et les faces latérales sont équilatérales. L'angle de deux faces, par exemple (SAB) et (SCB), ont un cosinus égal à $-\frac{1}{3}$

7. QUELQUES SITES À CONSULTER...

https://fr.wikipedia.org/wiki/Alv%C3%A9ole_d%27abeill : « Tout sur les alvéoles ! »

http://mathenjeans.free.fr/adh/articles/2011/Dunkerque-Capelle2011/abeilles-dunkerque-cappelle_2011.pdf : des idées pour la classe ?

http://turing.scedu.umontreal.ca/documents/Abeilles-collectif.pdf : À la page 5 de ce document, les collègues canadiens évoquent le dodécaèdre rhombique.
https://www.geogebra.org/m/DC6YSECx : une appliquette GeoGebra.

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA03003.pdf : en terminale S

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_e9rie_3-3_Avec_des_poly_e8dres.pdf (activité n°7)

8. ANNEXE

Extraits de « CURIOSITÉS GÉOMÉTRIQUES », d'Émile FOURREY, Vuibert, 1907.

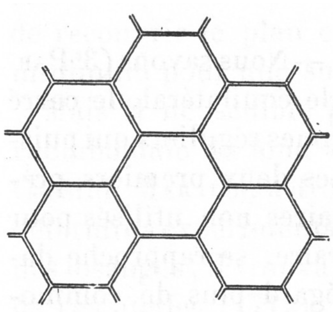


Fig. *a.* — Disposition des ouvertures.

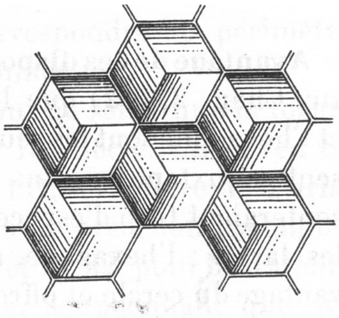


Fig. *b.* — Disposition des fonds.

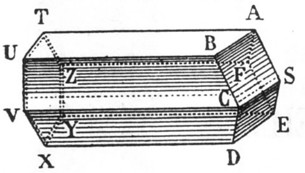
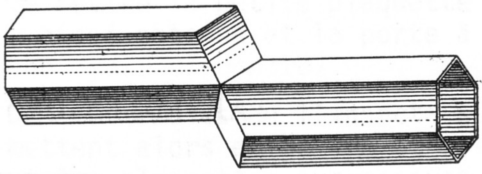


Fig. *c.* — Alvéole isolé.



ig. *d.* — Adossement des fonds.

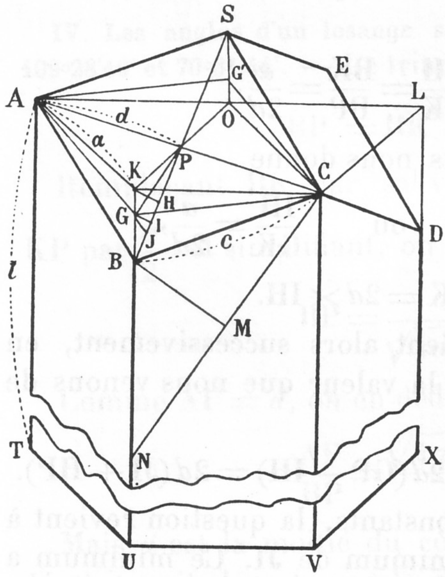


Fig. *h.*