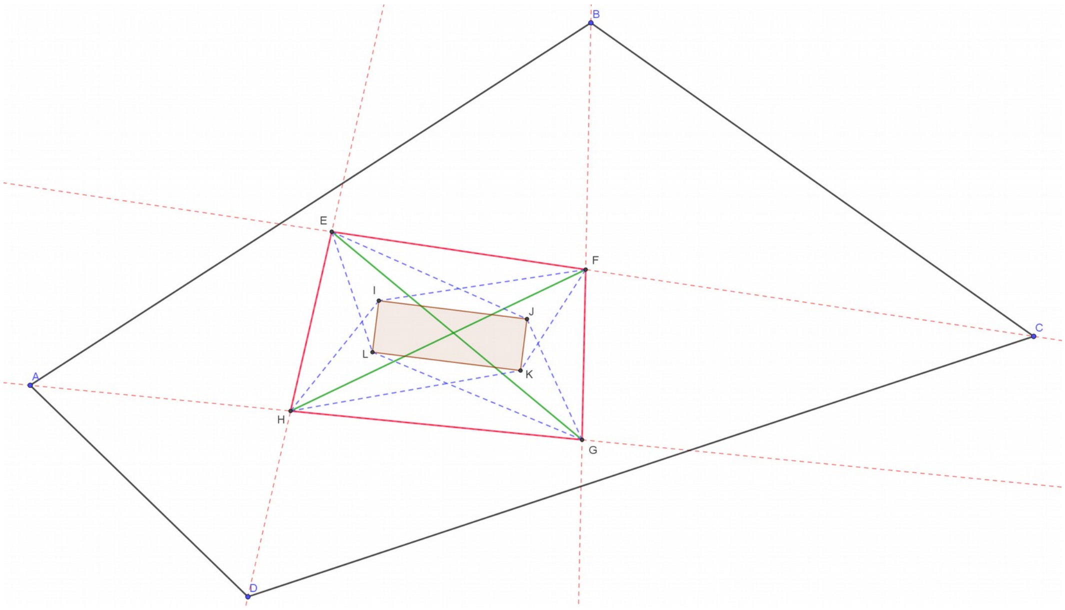
DES PROBLÈMES POUR LE PROF

INDICATIONS POUR LE PROBLÈME n°133

« C'est plié » : problème proposé par Damien Mégy



Rappelons l'énoncé

Le quadrilatère ABCD est quelconque.
Les droites « rouges » sont les bissectrices des angles de ce quadrilatère.
Leurs points d'intersection définissent un quadrilatère EFGH.
Les droites « bleues » sont des bissectrices des triangles définis par les segments diagonaux [EG] et [FH] et les quatre sommets du quadrilatère EFGH. Leurs intersections définissent un quadrilatère IJKL.

Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

Personne n'ayant proposé de réponse, nous vous proposons quelques pistes pour la résolution de ce problème. La solution complète sera proposée dans le prochain Petit Vert.

Indications

La démonstration s'établit en trois étapes :

- dans un premier temps, on montre que les points E, F, G et H sont cocycliques,
- dans un second temps, on exprime une relation entre, par exemple, $\left(\overrightarrow{LH}, \overrightarrow{LG}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EG}\right)$
- on montre enfin que le quadrilatère IJKL est rectangle en prouvant que les angles sont droits.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME n°134

Proposé par Jacques Verdier

On se donne une suite de n entiers u_1, u_2, … , u_n. J'affirme qu'on peut trouver k termes consécutifs de cette suite, dont la somme est divisible par n. Vrai ou faux ?

Le responsable de cette rubrique est philippe.fevotte@wanadoo.fr.
Lui envoyer vos propositions de solutions à ces deux problèmes (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

retour au sommaire

SOLUTION DU SOPHISME DU TRIMESTRE (n°133)

LE PLUS GRAND NOMBRE ENTIER EST 1

Pour le démontrer, nous majorons les entiers non nuls en utilisant une contraposition.

Soit un entier positif A > 1. Alors en multipliant par A, $A^2 > A$. Nous avons donc trouvé un entier A^2 plus grand que A : cela signifie que A n'est pas le plus grand entier.

On a donc montré que si A > 1, alors A n'est pas le plus grand entier. En contraposant, on en déduit que le plus grand entier est 1. Ainsi, 1 est plus grand que tous les nombres entiers.

Solution

Bien sûr, il y a une erreur quelque part dans notre raisonnement : nous savons tous que 1 n'est pas le plus grand nombre entier ! Nous allons débusquer l'erreur de raisonnement.

La première partie du raisonnement est correcte, ainsi que sa conclusion : il est effectivement vrai que « Si A dépasse 1, alors A n'est pas le plus grand entier ». Le problème est dans la contraposition. Dans le texte ci-dessus, on a fait un raccourci : la vraie contraposée de ce qui précède est « Si A est le plus grand entier, alors A ne dépasse pas 1 (c'est à dire A =1) ». Il y a un **SI** au début de cette phrase.

Lisez bien : cette phrase ne signifie pas, contrairement à ce qui est écrit dans la « fausse démonstration », que 1 est le plus grand entier (ce que l'on devrait démontrer avant de conclure), alors cet entier serait nécessairement 1. Encore aurait-il fallu montrer, au préalable, qu'il existait bien un plus grand entier … ce qui risque d'être difficile !

On peut même conclure, in fine, qu'il n'y a pas de plus grand entier, puisqu'il y a au moins un entier plus grand que 1 (par exemple 2).

Sophisme extrait de http://maths.amatheurs.fr

LE SOPHISME DU TRIMESTRE (n°134)

La définition du dictionnaire Robert est la suivante : « *Argument, raisonnement faux malgré une apparence de vérité* ». Le Petit Vert vous proposera régulièrement des sophismes, comme celui qui suit. Envoyez toute nouvelle proposition à jacverdier@orange.fr.

Affirmation : *n* points quelconques d'un plan sont toujours alignés

Cette démonstration se fait par récurrence.

Commençons par montrer « *l'hérédité* » : supposons qu'on ait montré que n points sont alignés. Soient $(n+1)$ points : A_1, A_2, …, A_{n+1}. Les points de A_1 jusqu'à A_n sont un ensemble de n points donc, d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont alignés. Autrement dit, le point A_1 est sur la droite formée par les points de A_2 à A_n.

De même, les points A_2 jusqu'à A_{n+1} forment un ensemble de points donc, d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont alignés. Donc le point A_{n+1} est sur la droite formée par les points A_2 à A_n. Les $(n+1)$ points sont alignés.

Puisqu'on a « l'hérédité », il ne nous manque que l'initialisation de la récurrence. Or elle est évidente : pour $n = 2$, les deux points sont toujours alignés !

Donc, finalement, par récurrence, pour tout n à partir de 2, n points du plan sont toujours alignés !

retour au sommaire