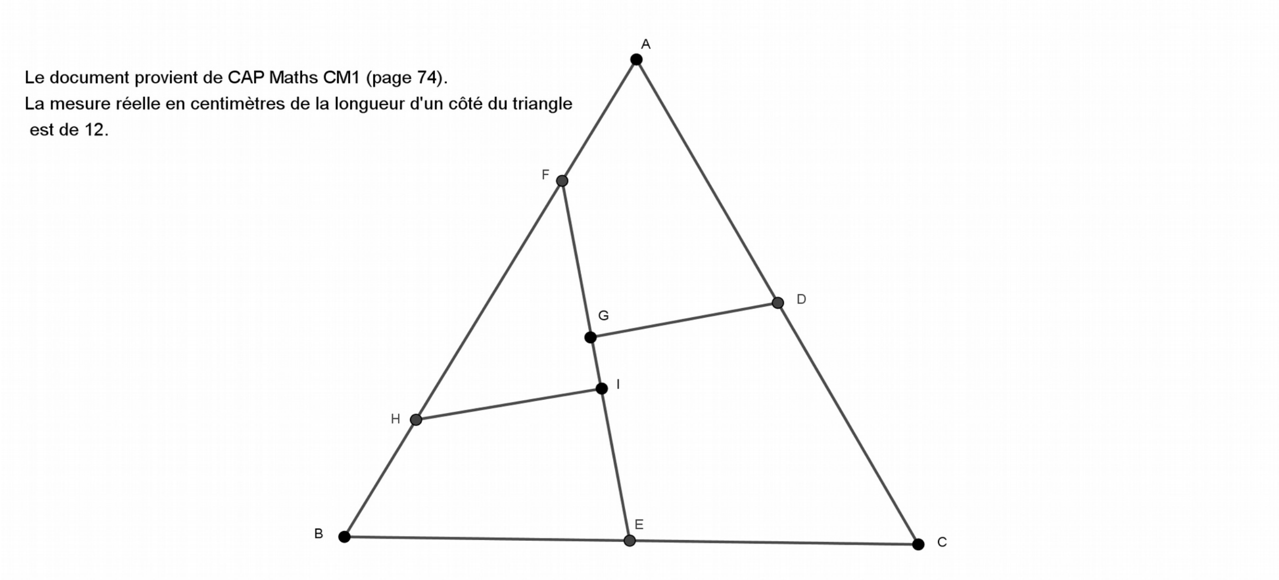
MATHS ET PLIAGES/DÉCOUPAGES

DU FAUX DUDENEY AU VRAI DÉCOUPAGE

Par Walter Nurdin, ÉSPÉ de Lorraine

Dans une classe de CM2, une professeure stagiaire EFS[6] a présenté la figure ci-dessous à ses élèves en leur annonçant qu'ils allaient construire un puzzle :



Les compétences annoncées dans la fiche de préparation étaient :

Chercher : s'engager dans une démarche, observer, se questionner, manipuler et expérimenter ;

Représenter : analyser une figure plane ;

Raisonner : passer progressivement de la perception au contrôle par les instruments.

Tous les élèves ont reçu cette figure.

L'enseignante a constitué des groupes de proximité en pivotant les tables et a donné à un membre du groupe une feuille blanche. Dans chaque groupe des rôles étaient attribués aux élèves (maitre du temps et de la distribution de la parole, rédacteur récoltant les décisions, rapporteur du groupe et un exécutant qui devait construire la figure).

Les élèves avaient comme consigne de se mettre d'accord pour réaliser une figure identique à celle distribuée. Ils pouvaient pour cela utiliser le matériel de géométrie habituel (règle, équerre, compas …) mais avaient interdiction d'utiliser du papier calque ou de travailler par transparence. Enfin, ils devaient prendre des notes pour pouvoir expliquer aux autres groupes la méthode employée.

L'ensemble des groupes a trouvé que le triangle était un triangle équilatéral dont les côtés mesuraient 12 cm, que D et E étaient les milieux respectifs de [AC] et [BC] et que F et H se plaçaient en constatant que : AF = BH = 3 cm.

Les méthodes divergeaient dans la détermination de G et I.

---

[6] Étudiant fonctionnaire stagiaire. Master 2.

retour au sommaire

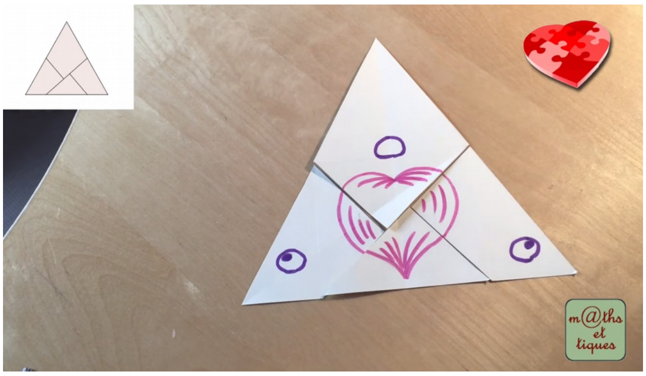
Quatre groupes ont mesuré les longueurs des segments [FG], [GI] et [IE] pour placer les points d'intersection, sans repérer les angles droits. Dans tous les groupes qui ont adopté cette procédure, il y a eu des discussions pour donner les mesures de [FG] et de [EI] entre 3,3 cm et 3,5 cm. Par contre ils ont tous pris la même mesure pour [FG] et [EI] devinant qu'il y avait ici une égalité. Un groupe a mesuré [FE], [FG], [GI] et [IE] pour s'assurer et se rassurer mais n'a pas remarqué qu'en prenant les mesures ils obtenaient que : FG+GI+IE > FE. Cependant comme ils ont positionné G et I en prenant uniquement les mesures de [FG] et [EI] ils n'ont pas vu l'erreur.
Deux groupes ont remarqué la perpendicularité de (GD) et (IH) avec (EF).
Ayant trouvé F et H ils ont utilisé l'équerre pour positionner I et G.
Les deux groupes ont tout de même mesuré [FG], [GI] et [IE] pour vérifier l'exactitude de leur construction.

Durant les 20 minutes de travail de groupe, l'enseignante les encourageait à poursuivre les recherches et les motivait, sans plus, malgré bien évidemment des demandes insistantes de validation ou simplement d'approbation.
La mise en commun a pu être rapide puisqu'il ne se dégageait que deux types de démarches. Malgré la ténacité de la professeure à valider le fait que tracer les perpendiculaires suffisait pour avoir la position des points G et I on percevait que, pour les élèves, il valait mieux mesurer pour s'assurer de la précision. Ce qui n'était pas faux car, parfois, l'équerre était utilisée d'une manière maladroite voire était abimée.
La figure reproduite, la professeure a demandé à tous les élèves de découper le triangle équilatéral initial en suivant les traits pour obtenir les 4 pièces attendues et de les assembler différemment pour obtenir un carré. Certains élèves ont reçu, pour différencier, une feuille où figurait l'empreinte du carré qu'ils devaient obtenir. Il restait à trouver l'emplacement des 4 pièces.

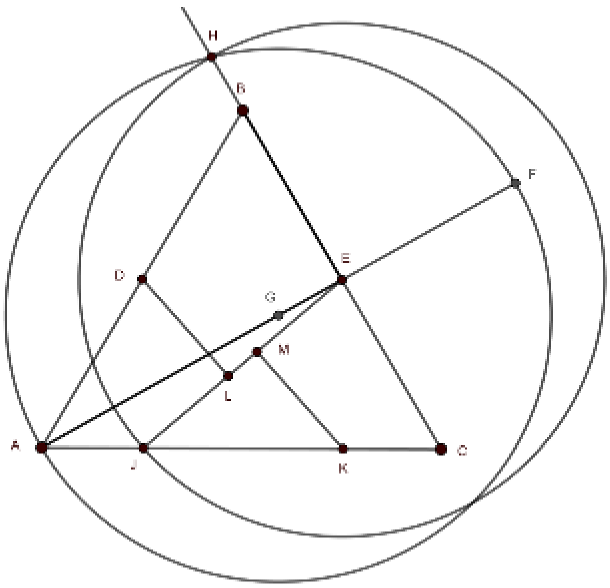
Lorsque nous avons ensuite analysé la séance à partir de nos observations de la classe, la professeure stagiaire fut surprise d'entendre qu'en fait le puzzle reproduit était faux. On ne pouvait pas affirmer, par les mesures prises, que l'on allait obtenir un carré. Pour elle, la validation était dans le fait que tous les élèves avaient construit le carré même ceux qui avaient l'empreinte. Elle acceptait que le puzzle pouvait être approximatif en raison des imprécisions des tracés et des mesures, mais pas des observations, surtout si on prenait en compte la perpendicularité des droites qui permettent par la suite d'obtenir des angles droits. En manipulant les pièces elle a convenu que cela autorisait d'affirmer que l'on avait un rectangle mais pas l'égalité des mesures des longueurs des côtés. Elle a été en partie rassurée lorsqu'elle a appris que l'on retrouvait souvent cette erreur sur la toile, faite par des non-mathématiciens et qu'en primaire, pour sa classe, l'importance n'était pas, selon moi, dans cette erreur mathématique mais bien dans les compétences annoncées qui, en l'occurrence, étaient correctement exercées.

On peut trouver à cette adresse : https://www.youtube.com/watch?v=-CUiMoh72Ow une construction par pliage qui reprend les constats des élèves de la classe observée. L'auteur, qui enseigne les mathématiques à Strasbourg, doit évidemment savoir que c'est une approximation mais néglige de le préciser certainement pour conserver l'aspect ludique de l'activité.
Le concepteur de la capsule vidéo obtient, en partant d'un cœur, une représentation d'une tête de chien (voir les captures d'écran ci-dessous).

retour au sommaire

La professeure stagiaire a repris, par la suite, cette vidéo pour apporter aux élèves, entre autres, la construction par pliage d'un triangle équilatéral.
Les pliages proposés permettent également de montrer, dans une classe de collège, que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à celle d'un angle plat.



En fait, la figure est connue sous le nom du « triangle de Dudeney ». Renseignement qui n'était pas indiqué sur le livre où la professeure avait trouvé l'activité. Elle ignorait alors toutes les contraintes de la figure et, se situant dans une géométrie instrumentée comme on le demande dans les classes de primaire, elle a conservé cette démarche et l'a transposée pour les élèves.

Plus précisément, il s'agit du problème 26 du livre « The Canterbury Puzzles »[7]. Dudeney le nomme « The Haberdasher's Puzzle ». Il nous met au défi de découper en 4 morceaux un tissu ayant la forme d'un triangle équilatéral et d'en faire un carré.

◀ Voici une reproduction de la figure (page 143 du livre) que Dudeney propose comme solution et les indications qu'il fournit pour la construction.

Dudeney place D et E milieux de [AB] et de [CB] puis prolonge [AE] de la longueur BE pour obtenir F. Le cercle de centre G, milieu de [AF], et de rayon GF coupe [CB] en H. Le cercle de centre E et de rayon EH coupe [AC] en J. Le point K est placé sur [AC] tel que JK = EB. Les perpendiculaires à (JE) menées depuis D et K permettent d'obtenir L et M.
S'il explicite sa construction, Dudeney ne la justifie à aucun moment.
Il affirme que EH est le ôté du carré, nous pouvons nous en convaincre.

- En considérant le triangle EHG rectangle en E on peut écrire :

$$\left(\frac{c}{4}(\sqrt{3}-1)\right)^2+EH^2=\left(\frac{c}{4}(\sqrt{3}+1)\right)^2.$$

[7] http://djm.cc/library/The_Canterbury_Puzzles_Dudeney_edited.pdf

On en tire que : EH = $\frac{c}{2}\sqrt[4]{3}$.

- De plus la mesure de l'aire du triangle équilatéral est : $\frac{c^2}{4}\sqrt{3}$.

Donc la mesure de la longueur du côté du futur carré est : $\frac{c}{2}\sqrt[4]{3}$.

Lorsqu'on réalise le puzzle, en partant du triangle équilatéral pour aboutir au carré, comme le propose la vidéo, on constate que D et E sont bien les milieux respectifs de [AB] et de [CB] puisque on doit superposer [DA] et [DB] et également [CE] et [EB].
On doit également avoir par construction du triangle équilatéral :
AJ + JK + KC = c (c étant la mesure de la longueur des côtés du triangle équilatéral)
En formant le carré on constate que AJ + KC = JK

On obtient par ces deux égalités que 2 JK = c. Ainsi : $JK=\frac{c}{2}$.

Connaissant J on pourra facilement trouver K en reportant la mesure précédente.

On remarque également, lorsque le carré est formé, que la mesure de la longueur du côté du carré est
JL + JM = EL + EM. Puisque les points sont, par construction, alignés on peut écrire :
JL + JL + LM = EM + ML + EM. On en déduit que JL = EM.
Et donc : JL + JM = EM + JM = JE.
Ainsi JE est la mesure de la longueur du côté du carré.

Comme JE = EH, on trouve la même longueur que Dudeney pour le côté du carré et on comprend mieux pourquoi Dudeney reporte la distance EH en utilisant le cercle de centre E et de rayon [EH].
Il veut que JE soit la mesure du côté du carré pour obtenir les bonnes mesures du carré.
En revenant à sa construction, il reste à prouver qu'elle permet d'obtenir le carré attendu.
Les angles droits du quadrilatère construit sont assurés par les angles droits en L et M.
Ainsi le quadrilatère construit est nécessairement un rectangle.

L'aire du rectangle est égale à l'aire du triangle, c'est à dire : $\frac{c^2}{4}\sqrt{3}$.

La mesure de la longueur de l'un des côtés du rectangle étant : $\frac{c}{2}\sqrt[4]{3}$.

La mesure du second côté de ce rectangle est donc bien : $\frac{c}{2}\sqrt[4]{3}$.

Le rectangle est donc bien un carré.

Si maintenant on prend la construction proposée par les élèves et que l'on calcule l'équivalent de JE, c'est à dire FE sur la figure des élèves, on trouve 3 $\sqrt{7}$.
Pour obtenir cette mesure il faut déjà calculer DE. Mais puisque D et E sont les milieux des côtés du triangle on sait que : DE= $\frac{c}{2.}$ De plus (DE) est parallèle à (AB).

Si on prend la construction des élèves on a : $BH=\frac{1}{4}$ BA et $AF=\frac{1}{4}$ AB.

retour au sommaire

En utilisant hauteur (CS) du triangle ABC et la réciproque du théorème de Thalès puis le théorème de Thalès dans les triangles ASC et BSC, on démontre que FDEH est un rectangle et que

FD = $\frac{c}{4}\sqrt{3}$. L'application du théorème de Pythagore dans le triangle FED rectangle en D permet

d'obtenir que FE = $\frac{c}{4}\sqrt{7}$.

Lorsque c=12 une approximation à 10^{-2} près de FE est : 7,93 cm.
Dans la « vraie » construction on obtient 7,89.
La différence est faible. Les imprécisions dans les mesures et les découpes font que l'on ne peut pas percevoir l'erreur sinon par le calcul.
On serait alors dans une géométrie déductive que l'on ne met véritablement en œuvre qu'à partir du collège.

* * * * * *

William Wallace a démontré[8] en 1807 un théorème énoncé par Farkas Bolyai qui précise qu'étant donné deux polygones dont les aires sont identiques il existe un découpage de l'un en un nombre fini de polygones qui permet de recouvrir exactement le second sans chevauchement. Pour le triangle équilatéral on savait donc que l'on pouvait le transformer en un carré de même aire. Il restait à trouver en combien de polygones et comment faire.

Jean-Pierre Friedelmeyer a écrit deux articles sur Dudeney. "Du triangle au carré en 3 coups de ciseaux" et également "Puzzles et équidécomposabilité des polygones plans".
Serge Parpay et Jean Fromentin ont également commis un article reprenant les travaux de Dudeney : "Du trapèze au puzzle de Dudeney".

Pour finir voici un bureau articulé qui utilise ce découpage. Un bureau « carré » peut ainsi se transformer en différents bureaux dont l'un peut être un bureau « triangle »...

… et une table en forme de « carré » qui peut se transformer en table « triangle » ou en une suite de tables polygonales pour accueillir plus de convives. (*cf.* brochure APMEP n° 1009 - Maths&Puzzles p.130)

[8] http://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et,847.html

retour au sommaire