ÉTUDE MATHÉMATIQUE

UN EXEMPLE DE MODÉLISATION

par Annette Leroy, IREM d'Orléans

N.d.l.r. Cet article a déjà été publié dans le bulletin APMEP n°459 de juillet-aout 2005.

La modélisation proposée ici est sans doute la première intervention des mathématiques dans un problème épidémiologique. Elle est due à Daniel Bernoulli (suisse, 1700-1782).

Quelques mots sur la famille Bernoulli

Les Bernoulli ont formé dès le 17^e^ siècle une véritable dynastie de mathématiciens et physiciens. Cette famille protestante issue d'Espagne s'est finalement fixée à Bâle après avoir quelque temps résidé à Anvers. On connaît Jacques Bernoulli (1654-1705) par ses travaux en probabilités. Daniel Bernoulli est l'un des ses neveux. Daniel a poursuivi, souvent avec la collaboration de Leonhard Euler (1707-1783), l'œuvre de son oncle Jacques et de son père Jean (1667-1748) dans le domaine de l'élasticité, de l'hydrodynamique et du calcul variationnel. Mais il a également ouvert la porte de plusieurs domaines scientifiques nouveaux, en particulier celui des statistiques.

Les objectifs de Daniel Bernoulli

Le 30 avril 1760, dans un mémoire de l'Académie des Sciences de Paris, D. Bernoulli propose une modélisation d'une épidémie de variole (appelée à l'époque « petite vérole ») pour tenter de savoir si l'inoculation de la maladie présente plus d'avantages que de risques pour la population sujette à cette épidémie. Il faut savoir qu'à l'époque les vaccins n'existent pas, la technique d'inoculation est très controversée et la maladie fait des ravages : selon le géophysicien Charles de la Condamine (1701-1774) « elle détruit, mutile ou défigure plus d'un quart de l'humanité ».

Modéliser, c'est ...

« Modéliser, c'est convertir un problème concret, issu du monde réel, en termes de nature mathématique. C'est transformer un besoin, plus ou moins bien exprimé, en équations, en essayant de rendre compte de toutes les contraintes.
Le mathématicien, qui ne voit que l'aspect mathématique, s'imagine toujours que la modélisation est chose facile ; pour lui, l'étape glorieuse est la résolution du problème mathématique une fois formalisé. Mais cette conception des choses est absolument erronée : c'est l'étape de modélisation qui est la plus délicate, la plus longue, et la plus périlleuse ; elle relève plus de l'art que de la science ; il faut parvenir, par de nombreuses discussions avec les utilisateurs, à bien comprendre leurs problèmes. On leur soumet un premier modèle, qui en général ne répond pas à leurs attentes, et on le modifie petit à petit, jusqu'à y parvenir aussi complètement que possible. Si on ne s'occupe pas de l'étape de modélisation, si on la néglige, si on la bâcle, et qu'on se précipite sur la résolution, on parvient immanquablement à " une excellente solution à un mauvais problème ", et l'utilisateur est rarement prêt à payer pour une solution qui ne répond pas à ses attentes. »

Bernard Beauzamy, PDG de la Société de Calculs Mathématiques (février 2001)

retour au sommaire

Pour être pertinente, une modélisation doit donc respecter quelques règles simples que nous allons suivre au fur et à mesure à propos du travail de Daniel Bernoulli.

Étape 1 : retenir des hypothèses

Le choix d'un modèle ne peut être fait qu'après avoir énoncé précisément les lois régissant le phénomène observé. Les lois doivent être énoncées sous forme mathématique. Ce travail délicat nécessite en général des compétences extérieures au champ strictement mathématique et consiste en premier lieu à simplifier ce que l'on observe en ne retenant que quelques propriétés que l'on juge saillantes et en négligeant toutes les autres.
Dans le *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* (1632), Galilée écrit :

> « Quand le philosophe géomètre veut reconnaitre dans le concret les effets qu'il a démontrés dans l'abstrait, il doit défalquer les empêchements dus à la matière ; s'il sait le faire, je vous assure que la correspondance sera aussi précise que pour les cours d'arithmétique ».

On retiendra que **modéliser consiste à appliquer des mathématiques à un fragment de réalité**.

Dans l'*Introduction apologétique* (1765), D. Bernoulli justifie ses choix :

> « ... Quel est le risque annuel à différents âges d'être surpris par la petite vérole, pour ceux qui ne l'ont pas eue, et quel est celui d'en mourir pour ceux qui en sont attaqués ? Il est vrai que nous ne sommes pas directement informés sur ces deux éléments, mais d'autres connaissances m'ont paru y suppléer avec beaucoup de vraisemblance...
>
> Nous voyons que la petite vérole n'attaque guère que les enfants et les jeunes gens, nous sommes d'abord portés à juger que la seule jeunesse y est exposée par sa constitution ... mais un peu plus de réflexion nous fait bientôt revenir sur cette erreur. S'il est rare que la petite vérole attaque les adultes, c'est qu'il est rare que les adultes ne l'aient pas eue, et qu'elle n'attaque jamais, ou presque jamais, deux fois la même personne. C'est ici le caractère essentiel de cette maladie... Il est donc vraisemblable que les vieillards qui n'ont pas eu la petite vérole, courent le même risque de l'avoir que les jeunes gens. Pour peu que ce risque diminuât avec l'âge, ce devrait être une chose sans exemple d'avoir la petite vérole à l'âge de 70 ans, et on en connaît plusieurs. Je n'ai donc plus hésité d'adopter mon premier principe, qui est que **tant qu'on a pas eu la petite vérole, on court continuellement le même risque de l'avoir**.
>
> Nous n'avons encore aucune observation qui nous oblige à renoncer à cette supposition, et les lois de la Nature les plus simples sont toujours les plus vraisemblables...
>
> **Quant au risque annuel d'être attaqué par la petite vérole, pour ceux qui ne l'ont pas eue, j'ai cru ne pouvoir satisfaire aux notions générales que nous avons sur cette maladie, qu'en la supposant d'un huitième, ce rapport de 1 sur 8 étant supposé constant** ... pour peu qu'on voulût changer ledit rapport de 1 sur 8, l'effet qui en rejaillirait sur les adultes et sur les vieillards serait trop sensible, et peut-être manifestement faux...
>
> **Disons encore un mot sur le risque de la petite vérole pour ceux qui en sont attaqués : la plupart l'ont fait d'un septième ; je l'ai un peu**

> **diminué, en le faisant d'un huitième** : deux raisons m'y ont engagé, la première est qu'on apprend exactement tous ceux qui en meurent, et qu'on ne saurait apprendre exactement tous ceux qui ont la maladie ; la seconde, est que le rapport de 1 sur 7 ferait la mortalité variolique trop grande par rapport à la mortalité entière, pendant que celui de 1 sur 8 est entièrement conforme à l'observation la mieux constatée, qui est que la petite vérole enlève la treizième partie du total des morts... »

D. Bernoulli posera aussi l'hypothèse que le risque de mourir par une autre cause que la petite vérole est le même que l'on ait la petite vérole ou non.

Étape 2 : mettre en équation

Le choix des inconnues et des variables du problème est une étape importante et délicate qu'il ne faut pas bâcler.
D. Bernoulli observe les tables de mortalité d'une population de 1 300 personnes de la naissance à l'âge de 24 ans. La variable t représente l'âge des individus en années.
On désigne par $N(t)$ le nombre de survivants de cette population à l'instant t , et par $x(t)$ le nombre des gens susceptibles d'avoir la variole à l'instant t, c'est-à-dire, parmi les $N(t)$ survivants, ceux qui n'ont pas encore eu la variole. Enfin $m(t)$ représente le taux annuel de décès par d'autres causes que la variole au sein des deux populations.
Les valeurs de $N(t)$ ont été relevées dans une table de mortalité. On n'a aucune information sur $m(t)$ et on se propose de calculer $x(t)$.
À partir des hypothèses retenues sur les variations annuelles, D. Bernoulli établit que les populations $x(t)$ et $N(t)$) satisfont le système :

$$\begin{cases} x(t+1)-x(t) = -\dfrac{1}{8}x(t)-m(t)x(t) \\ N(t+1)-N(t) = -\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{8}x(t)-m(t)N(t) \end{cases}$$

Le second membre de la première équation se justifie par le fait que l'accroissement de la fonction x comporte deux composantes qui s'ajoutent :

- d'une part $\dfrac{-1}{8}x(t)$ puisqu'à l'instant t, le risque d'attraper la petite vérole pour ceux qui ne l'ont pas eue est de 1 sur 8 ;
- et d'autre part $-m(t)x(t)$ puisqu'à l'instant t, parmi des gens susceptibles d'avoir la petite vérole, on déplore $m(t)x(t)$ décès par une autre cause que la petite vérole.

La seconde équation est obtenue à l'aide d'un raisonnement analogue.

En fractionnant l'année, on obtient $\begin{cases} x(t+\Delta t)-x(t)=\left[-\dfrac{1}{8}x(t)-m(t)x(t)\right]\Delta t \\ N(t+\Delta t)-N(t)=\left[-\dfrac{1}{64}x(t)-m(t)N(t)\right]\Delta t \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=-\dfrac{1}{8}x(t)-m(t)x(t) \\ \dfrac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=-\dfrac{1}{64}x(t)-m(t)N(t) \end{cases}$.

En considérant alors des petits accroissements, on aboutit, sous l'hypothèse que x et N sont des fonctions dérivables, à :

$$\begin{cases} x'(t) = -a\,x(t) - m(t)\,x(t) \\ N'(t) = -b\,x(t) - m(t)\,N(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad a = -\frac{1}{8}\ \text{et}\ b = -\frac{1}{64} \ .$$

Étape 3 : résoudre

On introduit la proportion de survivants à l'instant *t*, encore susceptibles d'avoir la variole en posant $f(t) = \dfrac{x(t)}{N(t)}$.

La fonction *f* est dérivable et il est facile de vérifier qu'elle vérifie le système suivant, où la mortalité n'apparait plus : $\begin{cases} f'(t) = f(t)[-a + b\,.\,f(t)] \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On résout cette équation différentielle logistique en posant $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

On démontre alors que la fonction *g* vérifie $\begin{cases} g'(t) = a\,g(t) - b \\ g(0) = 1 \end{cases}$

La résolution donne alors $g(t) = \left(1 - \dfrac{b}{a}\right) e^{at} + \dfrac{b}{a}$

On aboutit finalement à $x(t) = \dfrac{a}{b + (a-b)e^{at}}$

On en déduit que $x(t) = \dfrac{a}{b + (a-b)e^{at}} N(t)$.

C'est à dire, avec les valeurs retenues pour *a* et *b* : $x(t) = \dfrac{8}{1 + 7e^{0{,}125\,t}} N(t)$

Puisque $N(t)$ est donné par les tables de mortalité, on en déduit les expressions de $x(t)$ que l'on peut lire sur la table I colonne 3.

TABLE I.

Ages par années.	Survivans selon M. Halley.	N'ayant pas eu la pet. vérole	Ayant eu la pet. vérol.	Prenant la pet. vérole pendant ch. année.	Morts de la pet. vérole pendant chaq. ann.	Somme des morts de la pet. vérole.	Morts par d'autres maladies pend. chaq. année.
0	1300	1300	0				
1	1000	896	104	137	17,1	17,1	283
2	855	685	170	99	12,4	29,5	133
3	798	571	227	78	9.7	39.2	47
4	760	485	275	66	8.3	47.5	30
5	732	416	316	56	7.0	54.5	21
6	710	359	351	48	6,0	60,5	16
7	692	311	381	42	5.2	65.7	12.8
8	680	272	408	36	4.5	70.2	7.5
9	670	237	433	32	4.0	74.2	6
10	661	208	453	28	3.5	77.7	5.5
11	653	182	471	24.4	3.0	80.7	5
12	646	160	486	21.4	2.7	83.4	4.3
13	640	140	500	18.7	2.3	85.7	3.7
14	634	123	511	16,6	2.1	87.8	3.9
15	628	108	520	14.4	1.8	89.6	4.2
16	622	94	528	12,6	1,6	91,2	4.4
17	616	83	533	11,0	1.4	92,6	4.6
18	610	72	538	9.7	1.2	93.8	4.8
19	604	63	541	8.4	1.0	94.8	5
20	598	56	542	7.4	0.9	95.7	5.1
21	592	48.5	543	6.5	0.8	96.5	5.2
22	586	42.5	543	5.6	0.7	97.2	5.3
23	579	37	542	5.0	0.6	97.8	6.4
24	572	32.4	540	4.4	0.5	98.3	6.5

Colonne 1 : l'année *t*

Colonne 2 : les survivants $N(t)$

Colonne 3 : les survivants n'ayant pas eu la variole $x(t)$

Colonne 4 : les survivants atteints de la variole $N(t) - x(t)$

Colonne 5 : ceux qui prennent la variole chaque année $v(t)$. Il semble que, pour tenir compte des petites variations qui arrivent dans le cours d'une même année, D. Bernoulli prenne ici une moyenne :

$$v(t) = \frac{1}{8} \times \frac{x(t-1) + x(t)}{2}$$

Colonne 6 : morts par la variole chaque année : $\dfrac{1}{8} v(t)$

Colonne 7 : cumul des morts par la variole

Colonne 8 : autres morts chaque année

$$N(t-1) - N(t) - \frac{1}{8} v(t)$$

retour au sommaire

Les calculs précédents permettent à D. Bernoulli d'estimer quelle serait la population $y(t)$ à l'année *t* si personne ne mourait de la variole. Suivons les premières étapes du calcul.

- Année 1 : sur 1 300 personnes, 17,1 meurent de la variole donc $y(1)=N(1)+17{,}1=1\,017{,}1$.
- Année 2 : sur 1 000 personnes, il y a 133 décès autres que varioliques, soit $\frac{133\times 1017{,}1}{1000}$ pour une population de 1 017,1 personnes, donc $y(2)=y(1)-\frac{133\times 1017{,}1}{1000}\,881{,}8$.

Ainsi de suite, en utilisant la « règle de trois »... D. Bernoulli obtient alors la table II.

Étape 4 : analyser les résultats

La partie proprement mathématique est maintenant terminée. Il reste à examiner les résultats et analyser la pertinence de la modélisation.

Le problème de la validité du modèle est un problème très difficile que nous ne pouvons pas traiter ici. Revenons plutôt au problème initial de l'épidémie de la petite vérole.

TABLE II.

Ages par années.	Etat naturel & variolique.	Etat non-varioliq.	Differ. ou gains.	Ages par années.	Etat naturel & variolique.	Etat non-variolIq.	Differ. ou gains.
0	1300	1300	0	13	640	741.1	74.1
1	1000	1017,1	17,1	14	634	709.7	75.7
2	855	881,8	26,8	15	628	705,0	77,0
3	798	833.3	35.3	16	622	700,1	78,1
4	760	802,0	42,0	17	616	695.0	79.0
5	732	779,8	47,8	18	610	689,6	79,6
6	710	762,8	52,8	19	604	684,0	80,0
7	692	749.2	57,2	20	598	678,2	80.2
8	680	740.9	60.9	21	592	672.3	80.3
9	670	734.4	64.4	22	586	666,3	80.3
10	661	728.4	67.4	23	579	659.0	80.0
11	653	722.9	69.9	24	572	651.7	79.7
12	646	718,2	72,2	25	565	644.3	79.3

Cette Table fait voir d'un coup d'œil, combien sur 1300 enfans, supposés nés en même temps, il en resteroit de vivans d'année en année jusqu'à l'âge de vingt-cinq ans, en les supposant tous sujets à la petite verole : & combien il en resteroit s'ils étoient tous exempts de cette maladie, avec la comparaison & la difference des deux états.

D. Bernoulli explique le but de sa table II : « ... Je me suis attaché surtout, à exposer dans une même Table les deux états de l'humanité, l'un tel qu'il est effectivement, et l'autre tel qu'il serait si on pouvait affranchir de la petite vérole tout le genre humain. J'ai pensé que le parallèle de ces deux états en expliquerait mieux la différence et le contraste, que ne ferait le plus ample commentaire...»

Mais le cas de figure considéré était (à l'époque) bien sûr théorique ! En effet, des inoculés mouraient : 1 sur 600 à Londres en 1755. Et c'est sur ce nombre de décès que se fondaient les opposés à l'inoculation. D. Bernoulli poursuivit donc son étude en calculant ce qui se passerait si on avait une chance sur 200 de mourir de la variole après avoir été inoculé. Il estimait d'après les tables démographiques que ce rapport était un maximum. Avec des arguments de nature probabiliste, il conclut que l'espérance de vie passerait de 30 à 34 ans environ si tout le monde était inoculé. Son étude lui permit de prendre parti pour l'inoculation préventive comme mesure salutaire de prophylaxie collective en dépit du risque individuel que cette mesure comportait. Un long débat mathématique et philosophique, auquel Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) prit une part active, s'en suivit. C'est l'aspect statistique lui-même qui posait problème à D'Alembert, ce dernier estimant que le calcul du risque n'a pas le même sens vu dans la masse et vu par une mère et son enfant.Dans les Opuscules (tome II), D'Alembert écrit :

> « Je suppose avec monsieur Bernoulli que le risque de mourir de l'inoculation soit de 1 sur 200. Cela posé, il me semble que pour apprécier l'avantage de l'inoculation, il faut comparer, non la vie moyenne de 34 ans à la vie moyenne de 30, mais le risque de 1 sur 200 auquel on s'expose de mourir en un mois par l'inoculation (et cela à l'âge de trente ans, dans la force de la santé et de la jeunesse) à l'avantage éloigné de vivre quatre ans de plus au bout de 60 ans lorsqu'on sera beaucoup moins en état de jouir de la vie... Voilà, il n'en faut point douter, ce qui rend tant de personnes, et surtout tant de mères, peu favorables parmi nous à l'inoculation. »

Le texte qui suit donne une idée de l'ambiance de l'époque.
Dans l'Encyclopédie de Diderot (Denis, 1713-1784), on trouve un extrait écrit par Théodore Tronchin (1709-1781, médecin) :

> « Inoculation, s.f. (Chirurgie, Médecine, Morale, Politique)
> Ce nom synonyme d'insertion a prévalu pour désigner l'opération par laquelle on communique artificiellement la petite vérole, dans la vue de prévenir le danger et les ravages de cette maladie contractée naturellement.[...]
> Quand toute la France serait persuadée de l'importance et de l'utilité de cette pratique, elle ne peut s'introduire parmi nous sans la faveur du gouvernement ; et le gouvernement se déterminera-t-il jamais à la favoriser sans consulter les témoignages les plus décisifs en pareille matière ?
> C'est donc aux facultés de théologie et de médecine, c'est aux académies, c'est aux chefs de la magistrature, aux savants, aux gens de lettres, qu'il appartient de bannir des scrupules fomentés par l'ignorance, et de faire sentir au peuple que son utilité propre, que la charité chrétienne, que le bien de l'État, que la conservation des hommes sont intéressés à l'établissement de l'inoculation. Quand il s'agit du bien public, il est du devoir de la partie pensante de la nation d'éclairer ceux qui sont susceptibles de lumière, et d'entraîner par le poids de l'autorité cette foule sur qui l'évidence n'a point de prise ».

Quelques dates

• 1718 : premières inoculations à Londres, mais cette pratique était connue en Turquie depuis des temps immémoriaux.
• 1755 : premières inoculations à Paris.
• 1796 : premières immunisations par le médecin anglais Edward Jenner à l'aide d'une jeune paysanne qui s'était inoculée la « vaccinae » (variole de la vache) en trayant les vaches. Le mot « vaccination » n'est apparu que vers 1880 avec Pasteur.
• 1902 : la vaccination contre la variole est rendue obligatoire.
• 1979 : l'OMS déclare la variole éradiquée de la surface de la terre, et la France arrête la vaccination antivariolique.
• 1999 : destruction totale de tous les stocks de virus, les souches virales devenant dangereuses avec la montée du terrorisme. Le virus de la variole est aujourd'hui conservé au centre de contrôle des maladies d'Atlanta (États-Unis) et dans un centre de recherche russe.

Références

• L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques : Tome II. Analyse.
Thierry LAMBRE, Ellipses, 1998.