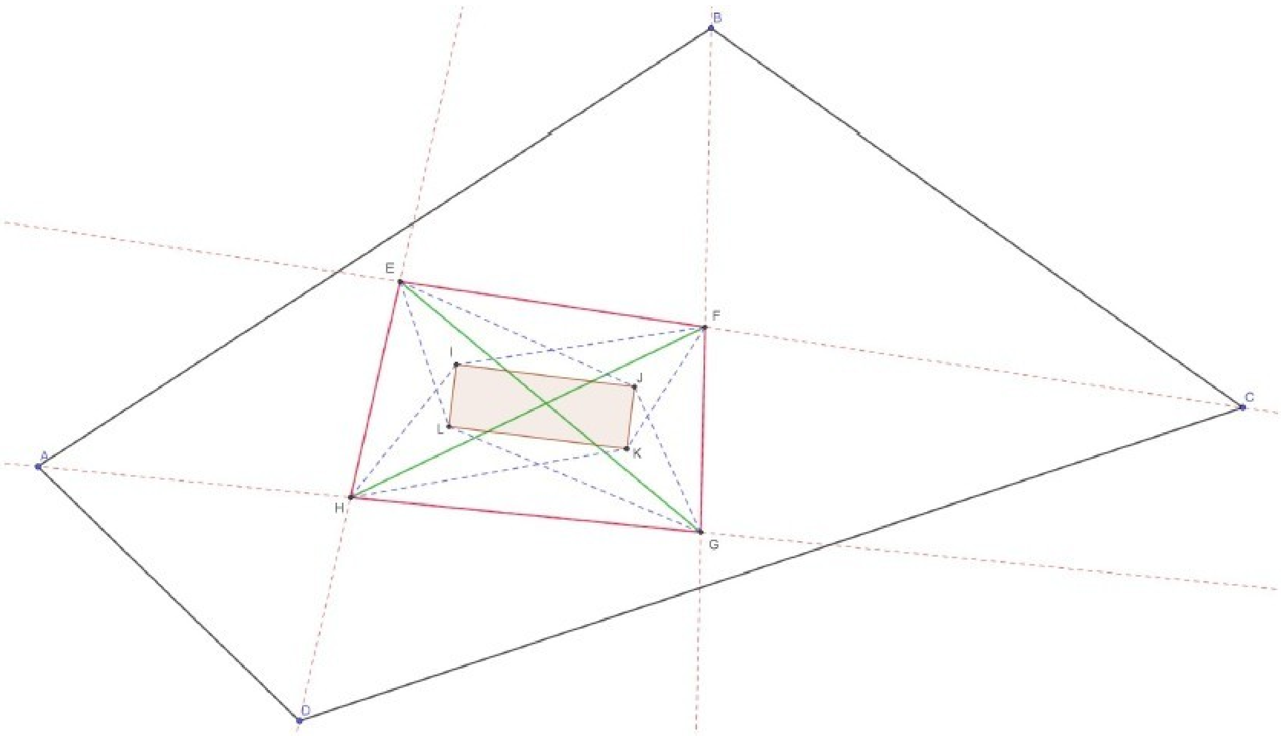
LE PROBLÈME DU TRIMESTRE N°133

Le responsable de cette rubrique est philippe.fevotte@wanadoo.fr.
Lui envoyer vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

« **C'est plié** » *: problème proposé par Damien Mégy*



Le quadrilatère ABCD est un quadrilatère convexe quelconque.

Les droites « rouges » sont les bissectrices « intérieures » des angles de ce quadrilatère. Leurs points d'intersection définissent un quadrilatère EFGH.

Les droites « bleues » sont des bissectrices des triangles définis par les segments diagonaux [EG] et [FH] et les quatre sommets du quadrilatère EFGH. Leurs intersections définissent un quadrilatère IJKL.

Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

retour au sommaire

SOLUTION DU PROBLÈME DU TRIMESTRE n°132

Rappel de l'énoncé : Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier *n* par

$$u_n = e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right) \quad ?$$

C'est un problème paru dans un numéro de l'Ouvert en 1984, mais dont la solution n'était pas proposée. La réponse est $\frac{1}{2}$.

Soient X_0 , X_1 , … X_n une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de poisson de paramètre 1 ; on sait que la somme $S_n = X_0 + X_1 \ldots + X_n$ est elle même une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $n+1$.

On peut remarquer que $u_n = Pr(S_n \leq n)$

On peut écrire que $Pr(S_n > n) = Pr(S_n \geq n+1) = Pr\left(\frac{S_n-(n+1)}{\sqrt{n+1}} \geq 0\right)$.

S_n étant la somme de variables aléatoires indépendantes, de même loi, de moyenne 1 et d'écart-tye 1, on peut utiliser le théorème central limite.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} Pr(S_n > n) = \lim\limits_{n\to+\infty} Pr\left(\frac{S_n-(n+1)}{\sqrt{n+1}} \geq 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2}$;

on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Pr(S_n \leq n) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

* * * * *

Jacques Choné propose trois solutions qui s'appuient toutes sur une autre expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, proposée en préliminaire :

Une récurrence « facile » permet de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad e^{-u}\frac{u^n}{n!} + \frac{d}{du}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{-u}\frac{u^k}{k!}\right) = 0 \quad .$$

On en déduit par intégration que $\sum_{k=0}^{n} e^{-u}\frac{u^k}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}\int_0^u x^n e^{-x} dx$

c'est-à-dire (puisque $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$) :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-u}\frac{u^k}{k!} = \frac{1}{n!}\int_u^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad ;$$

d'où enfin, avec $u=n$: $u_n = \frac{1}{n!}\int_n^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

retour au sommaire

Remarque : cette écriture intégrale de la suite permet, par des encadrements assez simples, de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et donc convergente, car elle est minorée par 0.

Solution 1

Elle s'appuie également sur une interprétation probabiliste de la suite.

Soient Y_1 , Y_2 , … Y_{n+1} une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1 (ce qui signifie que $Pr(Y_k>y)=e^{-y}$ pour $y>0$) ;

alors si $X_{n+1}=Y_1+Y_2...+Y_{n+1}$, on a $Pr(X_{n+1}>x)=\int_x^{+\infty} u^n e^{-u}du$

(voir par exemple https://cours.etsmtl.ca/seg/emfrih/MAT350/Notes%20de%20cours/conv-continues.pdf)

On en déduit, par l'utilisation du théorème central limite que $\lim_{n\to+\infty} Pr(\frac{X_{n+1}-(n+1)}{\sqrt{n+1}}>0)=\frac{1}{2}$

;

on a donc obtenu que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\int_{n+1}^{+\infty} u^n e^{-u}dx=\frac{1}{2}$.

Une majoration simple permet de montrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\int_n^{n+1} u^n e^{-u}dx=0$ et par conséquent que $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$.

Solution 2

Elle se passe du théorème central limite, mais fait intervenir le théorème de convergence dominée.

Puisque $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx=n!$ il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^n x^n e^{-x}dx=\frac{1}{2}$.

On effectue le changement de variable $x=\frac{n-t}{\sqrt{n}}$ et on obtient que

$$\frac{1}{n!}\int_0^n x^n e^{-x}dx=\frac{n^n\sqrt{n}\,e^{-n}}{n!}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$$

avec f_n définie par : $f_n(x)=(1-\frac{x}{\sqrt{n}})^n e^{x\sqrt{n}}$ sur $[0;\sqrt{n}]$ et 0 sinon.

On montre aisément que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ et qu'elle est dominée par cette limite.

retour au sommaire

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ et, pour conclure, il suffit maintenant d'utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution 3

C'est également une solution entièrement analytique, mais dont une partie est, comme le précise lui même Jacques Choné, au delà des attendus de cette rubrique. L'étape la plus ardue fait appel à la référence :
https://math.stackexchange.com/questions/327525/growth-of-gamman1-n-and-operatornamee-nn

où on démontre que $\int_n^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{3}{4\mathrm{n}} + o\left(n^{-1}\right)\right)$.

Pour conclure, il suffit, comme précédemment, d'utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *lorsque* $n \to +\infty$

retour au sommaire