

LE PROBLÈME DU TRIMESTRE n°132

Proposé par Jacques Verdier

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par

$$u_n = e^{-n} \times \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!}\right) ?$$

Le responsable de cette rubrique est philippe.fevotte@wanadoo.fr.

Lui envoyer vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION DU PROBLÈME n°131

Rappelons l'énoncé du problème proposé par Jacques Choné :

Les nombres de Fibonacci sont les termes de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 = 0, f_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

Est-il vrai que la somme des carrés de deux nombres de Fibonacci consécutifs soit toujours un nombre de Fibonacci ?

SOLUTION

La réponse est oui et il y a plusieurs démonstrations possibles.

La première est proposée par Noël Lambert (qui signale un site proposant cette solution : <https://ima.org.uk/950/sum-of-the-squares-of-consecutive-fibonacci-numbers-puzzle/>), et André Stef en partant de l'expression explicite de la suite de Fibonacci.

Avec les notations de l'énoncé, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \alpha^n)$, où $\phi > \alpha$ sont les

racines de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. On a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\phi\alpha = -1$

(NB : ϕ est le nombre d'or et cette formule dite de Binet est obtenue en étudiant la suite définie par une relation de récurrence linéaire à coefficients constants).

On calcule, pour un entier naturel n quelconque :

$$f_{n+1}^2 + f_n^2 = \frac{1}{5}(\phi^{2n+2} - 2(-1)^{n+1} + \alpha^{2n+2} + \phi^{2n} - 2(-1)^n + \alpha^n).$$

On rapproche des termes $f_{n+1}^2 + f_n^2 = \frac{1}{5}(\phi^{2n}(\phi^2 + 1) + \alpha^{2n}(\alpha^2 + 1))$,

En utilisant les expressions algébriques de ϕ et α , on voit que

$$\phi^2 + 1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\phi \text{ et } \alpha^2 + 1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}\alpha,$$

Ainsi $f_{n+1}^2 + f_n^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{2n+1} - \alpha^{2n+1}) = f_{2n+1}$, ce qui répond à la question.

On pouvait également se passer de cette expression explicite et raisonner par récurrence. Un calcul sur les premiers termes permet de conjecturer que

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}; \text{ un essai de démonstration par récurrence amène au calcul de } f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2 = (f_{n+1} + f_n)^2 + (f_n + f_{n-1})^2 = f_{n+1}^2 + f_n^2 + 2f_{n+1}f_n + f_n^2 + f_{n-1}^2 + 2f_nf_{n-1}$$

donc $f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1} + 2f_{n+1}f_n + f_{2n-1} + 2f_nf_{n-1}$

Soit $f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+2} - f_{2n} + 2f_{n+1}f_n + f_{2n+1} - f_{2n} + 2f_nf_{n-1}$

soit $f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+2} + f_{2n+1} + 2f_{n+1}f_n + 2f_nf_{n-1} - 2f_{2n}$

d'où $f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+3} + 2(f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} - f_{2n})$

Il nous faut donc montrer que $f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} - f_{2n} = 0$.

Ainsi on est amené à démontrer **conjointement** par récurrence que :

$$f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} \quad \text{et} \quad f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1} \quad (H(n))$$

pour $n=1$, on vérifie que $0 \times 1 + 1 \times 1 = 1 = f_2$ et $1^2 + 1^2 = 2 = f_3$, $H(1)$ est vraie.

Supposons que $H(n)$ est vraie et montrons que $H(n+1)$ est vraie :

$$f_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n} = f_n^2 + f_{n+1}^2 + f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} \quad \text{et donc}$$

$$f_{2n+2} = f_n(f_n + f_{n-1}) + f_{n+1}(f_{n+1} + f_n) = f_nf_{n+1} + f_{n+1}f_{n+2}$$

De plus

$$f_{2n+3} = f_{2n+2} + f_{2n+1} = f_{2n+1} + f_{2n} + f_{2n+1} \quad \text{et donc}$$

$$f_{2n+3} = f_{2n+1} + f_{2n} + f_{2n+1} = (f_n^2 + f_{n+1}^2) + (f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1}) + (f_n^2 + f_{n+1}^2)$$

Soit $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_n(f_n + f_{n-1}) + f_n^2 + f_{n+1}(f_n + f_{n+1})$

Soit $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_nf_{n+1} + f_n^2 + f_{n+1}f_{n+2}$

Soit $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_n(f_{n+1} + f_n) + f_{n+1}f_{n+2}$

Soit $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_nf_{n+2} + f_{n+1}f_{n+2} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}(f_n + f_{n+1})$

Et par conséquent $f_{2n+3} = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2$;

La proposition « $H(n)$ implique $H(n+1)$ » est vraie, ce qui achève la démonstration.

Jacques Choné en propose une version plus « élégante » :

Soit n un nombre entier naturel quelconque fixé et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$g_0 = f_{n+1}, \quad g_1 = f_{n+2} \quad \text{et pour tout } m \in \mathbb{N} \quad g_{m+2} = g_m + g_{m+1}.$$

Montrons par récurrence que $\forall m \in \mathbb{N} \quad g_m = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1} \quad (1)$.

On a : $f_0 f_n + f_1 f_{n+1} = f_{n+1} = g_0$ et $f_1 f_n + f_2 f_{n+1} = f_n + f_{n+1} = f_{n+2} = g_1$;

la proposition est donc vraie pour $m=0$ et pour $m=1$.

Soit $m \in \mathbb{N}$; supposons la propriété vraie pour m et $m+1$. On a, alors :

$$g_{m+2} = g_m + g_{m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1} + f_{m+1} f_n + f_{m+2} f_{n+1} = f_{m+2} f_n + f_{m+3} f_{n+1} \quad \text{ce qui termine la récurrence.}$$

Montrons également par récurrence que $\forall m \in \mathbb{N} \quad g_m = f_{n+1+m} \quad (2)$.

La proposition est vraie pour $m=0$ et $m=1$. Si elle est vraie pour m et $m+1$, alors :

$$g_{m+2} = g_m + g_{m+1} = f_{n+1+m} + f_{n+1+m+1} = f_{n+1+m+2} \quad \text{ce qui termine la récurrence.}$$

De (2) et de (1), on tire alors avec $m=n$: $f_{2n+1} = g_n = f_n^2 + f_{n+1}^2$.