

DES DÉFIS POUR NOS ÉLÈVES

DÉFI 132-a : LE MESSAGE DE NOËL

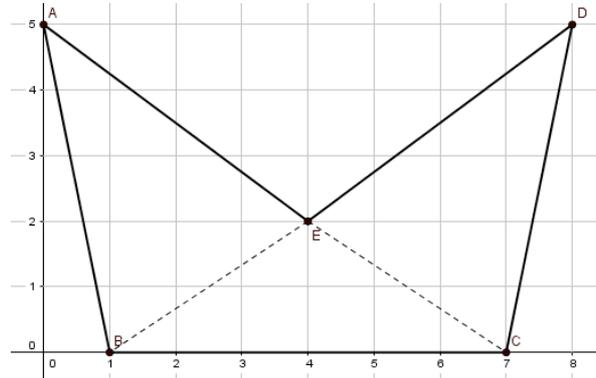
Notre ami est enfermé un soir de Noël dans un immeuble. Il n'a aucun moyen de communication. Il remarque dans l'immeuble d'en face qu'une personne est encore sur son ordinateur. Il sait que des ingénieurs en informatique travaillent dans cet immeuble. Il lui vient alors une idée. Il va envoyer un message en allumant le sapin et l'éteignant en suivant un code simple qu'un ingénieur en informatique pourra facilement transcrire.

Pouvez-vous retrouver le message de 14 lettres que notre ami tente de transmettre ?



DÉFI 132-b : LE BONNET D'ÂNE

Voici un défi apparemment tout simple : calculer l'aire de ce « bonnet d'âne » ABCDE.



Les coordonnées des points sont A(0;5), B(1;0), C(7;0), D(8;5) et E(4;2).

Les élèves de deux groupes ont calculé cette aire de deux façons différentes.

Premier groupe : les élèves ont calculé la différence des aires du trapèze (ABCD) et du triangle (AED).

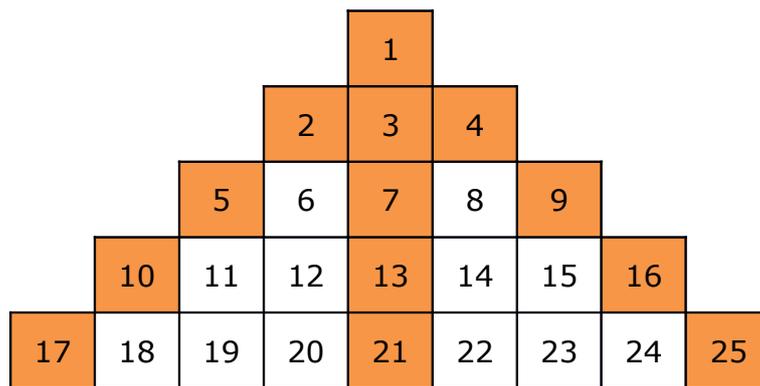
$$\text{Elle vaut : } \frac{1}{2}(6+8) \times 5 - \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 35 - 12 = \mathbf{23}$$

Second groupe : les élèves ont calculé la somme des aires de (ABC) et de (BDC), et en ont retranché celle de (BEC) qui a été comptée deux fois.

$$\text{On trouve : } \frac{1}{2}(6 \times 5) + \frac{1}{2}(6 \times 5) - \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = \mathbf{24}$$

Chacune de ces méthodes semble exacte, et pourtant les résultats sont différents. Il y a donc un « hic ». Une des deux méthodes est-elle fautive (ou les deux) ? Sauriez-vous expliquer ce qui s'est passé ?

SOLUTION DU DÉFI « PYRAMIDE DE NOMBRES » (n°131-a)



Rappel du défi : observez cette « pyramide ». Quels seront les nombres dans les cases oranges de la dixième ligne ? De la 2017^{ème} ligne ? De la n^{ème} ligne ?

Éléments pour la solution

17	10	5	2	1
<i>18</i>	<i>11</i>	<i>6</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>19</i>	<i>12</i>	7	8	9
<i>20</i>	13	<i>14</i>	<i>15</i>	16
21	<i>22</i>	<i>23</i>	<i>24</i>	25

Les nombres correspondant aux cases oranges de l'énoncé sont en gras sur le damier ci-contre à gauche ; ceux qui correspondent aux cases blanches de l'énoncé sont en italique.

En observant les nombres que l'on obtient à droite, on s'aperçoit que ce sont les carrés du numéro de l'étage : pour le second étage c'est 4, ... pour le cinquième étage c'est 25.

Pour la dixième étage ce sera 100, et pour le 2017^{ème} étage, ce sera 4 068 289.

Les nombres que l'on obtient à gauche sont les successeurs du nombre de droite de la ligne qui est immédiatement au dessus. Par exemple, la quatrième ligne se termine par 16, donc la cinquième ligne débute par 17.

Le premier nombre de la 10^{ème} ligne sera donc $9^2+1 = 82$.

Et le premier nombre de la 2017^{ème} ligne sera $2016^2+1 = 4\,064\,257$.

Quant au nombre au centre de la ligne, c'est la demi-somme des deux extrémités de cette ligne. Par exemple, pour la cinquième ligne, c'est $(17+25)/2 = 21$.

Pour la 10^{ème} ligne, ce sera donc $(82+100)/2 = 91$

Et pour la 2017^{ème} ligne, ce sera $(4\,064\,257 + 4\,068\,289)/2 = 4\,662\,273$.

Par construction, et comme l'illustre le carré ci-dessus, à l'étage n la pyramide possède n^2 cases. La dernière case à droite vaut donc n^2 .

Le contenu de la dernière case de gauche est égal à celui de la dernière case de droite de la ligne $n-1$ auquel on ajoute 1, soit $(n-1)^2 + 1$.

Le nombre central est la demi-somme des nombres des extrémités soit $n^2 - n + 1$

SOLUTION DU DÉFI « LES TROIS FILLES » (n°131-b)

Rappel de l'énoncé : Le concierge de l'immeuble où habite Cédric Villani a trois filles. Il s'adresse à Cédric en lui précisant que le produit de leurs âges est égal à 36 et que la somme de leurs âges est égale au numéro de l'immeuble qu'ils habitent. Cédric doit deviner leurs âges. Après quelques instants de réflexion, Cédric se déclare incapable de deviner ces trois âges. Le concierge, tout heureux de le mettre en défaut, lui annonce qu'il va en parler à son ainée. À ces mots, Cédric Villani lui donne aussitôt l'âge des trois filles.

Et vous, avez-vous trouvé leurs âges ?

Solution : les trois filles ont respectivement 2 ans, 2 ans et 9 ans. En effet, si le produit des trois âges est égal à 26, les seules possibilités sont les suivantes : $1 \times 1 \times 36$ dont la somme est 38, $1 \times 2 \times 18$ dont la somme est 21, $1 \times 3 \times 12$ dont la somme est 16, $1 \times 4 \times 9$ dont la somme est 14, $1 \times 6 \times 6$ dont la somme est 13, $2 \times 2 \times 9$ dont la somme est 13, $2 \times 3 \times 6$ dont la somme est 11 et $3 \times 3 \times 4$ dont la somme est 10.

Si Cédric ne peut pas répondre c'est que le numéro de l'immeuble où lui-même et le concierge habitent est le 13, car il y a deux triplets qui aboutissent à la même somme : ce sont les triplets (1,6,6) et (2,2,9). Pour tous les autres triplets, les trois âges sont déterminés, et Cédric aurait pu répondre.

Quand le concierge lui dit qu'il va en parler à son ainée, cela élimine les jumelles (6;6) : sinon, il n'aurait pas dit « mon ainée ». Les trois âges sont donc : 2 ans, 2 ans et 9 ans.

SOLUTION DU DÉFI « ÉLECTIONS » (n°131-c)

Rappel de l'énoncé : Dans la commune de Ville-la-Petite, il n'y a que 14 inscrits sur les listes électorales. Au lendemain du référendum, qui posait la question « Souhaitez-vous trouver un défi mathématique dans le bulletin municipal mensuel ? », le journal local annonçait qu'il y avait eu 83,33 % de OUI.

Peux-tu dire combien de personnes ont voté OUI ?

Deux réponses sont possibles : soit il y a eu **12** votants, soit il y en a eu seulement **6**. Ce sont les seules possibilités qui permettent d'obtenir un score de 83,33 %.

La réponse peut être facilement obtenue en utilisant un tableur : dans la colonne de gauche on inscrit le nombre de votants ; dans les autres colonnes on calcule le taux de « OUI » en fonction du nombre de votants.

NB. Votants	Nombre et pourcentage de OUI (par rapport au nombre de votants)													
	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
14	100,00%	92,86%	85,71%	78,57%	71,43%	64,29%	57,14%	50,00%	42,86%	35,71%	28,57%	21,43%	14,29%	7,14%
13		100,00%	92,31%	84,62%	76,92%	69,23%	61,54%	53,85%	46,15%	38,46%	30,77%	23,08%	15,38%	7,69%
12			100,00%	91,67%	83,33%	75,00%	66,67%	58,33%	50,00%	41,67%	33,33%	25,00%	16,67%	8,33%
11				100,00%	90,91%	81,82%	72,73%	63,64%	54,55%	45,45%	36,36%	27,27%	18,18%	9,09%
10					100,00%	90,00%	80,00%	70,00%	60,00%	50,00%	40,00%	30,00%	20,00%	10,00%
9						100,00%	88,89%	77,78%	66,67%	55,56%	44,44%	33,33%	22,22%	11,11%
8							100,00%	87,50%	75,00%	62,50%	50,00%	37,50%	25,00%	12,50%
7								100,00%	85,71%	71,43%	57,14%	42,86%	28,57%	14,29%
6									100,00%	83,33%	66,67%	50,00%	33,33%	16,67%
5										100,00%	80,00%	60,00%	40,00%	20,00%
4											100,00%	75,00%	50,00%	25,00%
3												100,00%	66,67%	33,33%
2													100,00%	50,00%
1														100,00%