SOLUTION DU PROBLÈME n°130

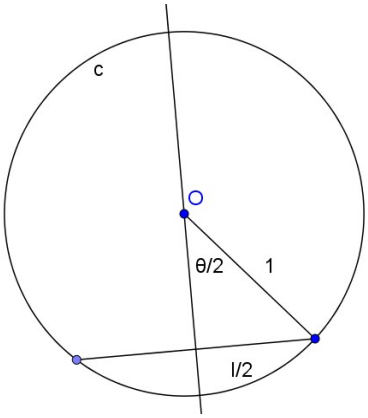
Rappel de l'énoncé (*problème proposé par Philippe Févotte*) : on considère un cercle C de rayon 1, un point A intérieur au cercle C, un point B extérieur à ce cercle ainsi qu'une longueur l donnée.

Peut-on déterminer deux points *M* et *N* du cercle C tels que les droites (*AM*) et (*BN*) soient parallèles et que MN = *l* ?

SOLUTION

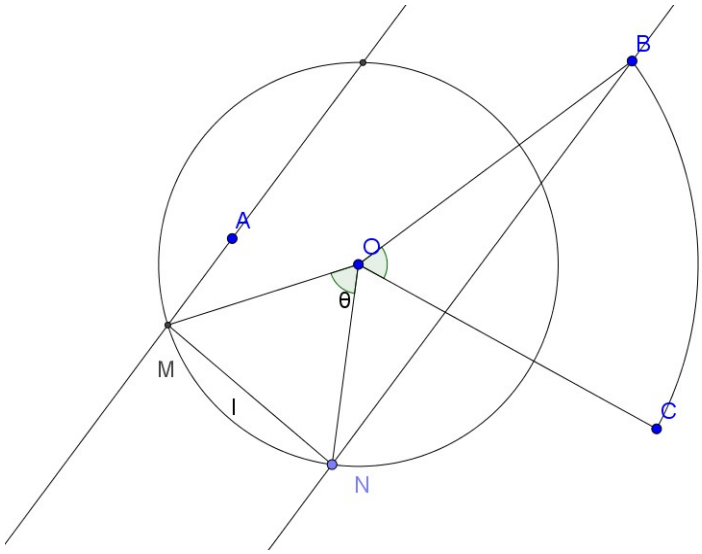
Deux remarques :

- si $l > 2$ le problème n'a pas de solution ; on suppose dans la suite que $l \leqslant 2$
- la longueur $l \leqslant 2$ définit la mesure $\theta \in [0\,;\pi]$ d'un angle au centre, telle que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{l}{2}$



Analyse

Supposons le problème résolu ; on a $\left(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON}\right) = \theta\ (2\pi)$ ou $\left(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON}\right) = -\theta\ (2\pi)$. A une symétrie par rapport un diamètre près, on peut choisir les points tels que $\left(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON}\right) = \theta\ (2\pi)$



On considère la rotation *r* de centre *O* et d'angle θ ; elle transforme *M* en *N* et on note *C* l'antécédent de *B* par cette rotation.

retour au sommaire

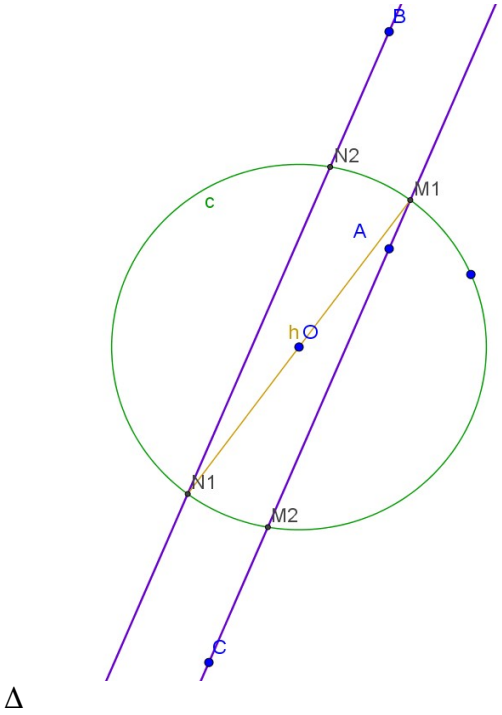
Par conséquent $\left(\overrightarrow{CM}\,,\overrightarrow{BN}\right)=\theta\,(2\pi)$ et $\overline{((CM),(BN))}=\theta\,(\pi)$. Or les droites (*BN*) et (*AM*) sont parallèles ; on en déduit que $\overline{((CM),(AM))}=\theta\,(\pi)$ et par conséquent, :

- si $\theta=0(\pi)$ le point *M* appartient à la droite (*AC*)
- si $\theta\neq 0(\pi)$ le point *M* appartient au cercle capable « d'où l'on voit A et C sous un angle de mesure $\theta(\pi)$ »

Synthèse

Premier cas : $l=2$

Dans ce cas, avec les notations précédentes, $\theta=\pi(2\pi)$; *C* est le symétrique de *B* par rapport à *O* ; Soit Δ la droite passant par B et parallèle à (*AC*), cette droite est symétrique de la droite (*AC*) par rapport à *O* et les points d'intersection de ces droites avec le cercle C sont donc symétriques par rapport à *O*. Deux de ces points symétriques sont les points *M* et *N* cherchés.



Δ

Second cas : $l<2$

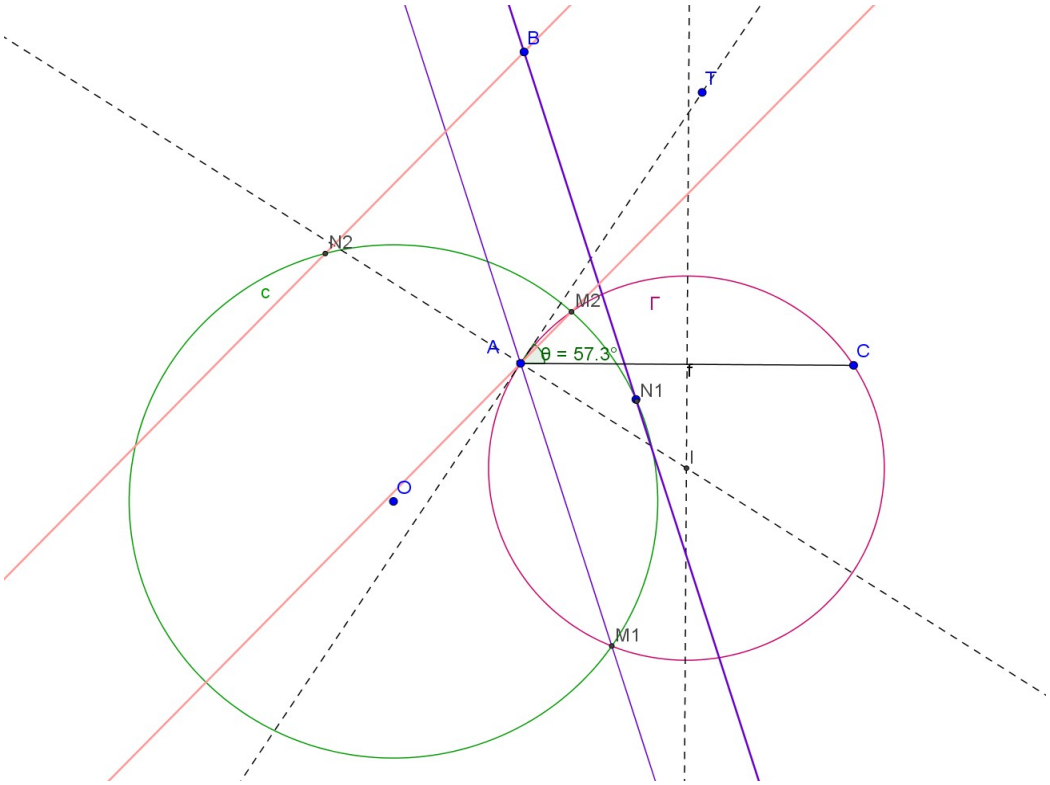
notons Γ le cercle capable associé aux points C et A et à la mesure θ définie en préliminaire. Soit M un point de $C\cap\Gamma$; on a donc $\overline{((MC),(MA))}=\theta\,(\pi)$ (1)

On considère la rotation *r* de centre *O* et d'angle θ ; elle transforme *M* en *N* et on note *C* l'antécédent de *B* par cette rotation. On a donc $\overline{((MC),(NB))}=\theta\,(\pi)$ (2)

Des égalités (1) et (2) on déduit que les droites (*AM*) et (*BN*) sont parallèles et on sait par construction que $MN=l$

On donne ci-dessous la construction des points M et N, faisant apparaître deux couples solution.

retour au sommaire



PROBLÈME DU TRIMESTRE n° 131

problème proposé par Jacques Choné

Les nombres de Fibonacci sont les termes de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$f_0=0$, $f_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$.

Est-il vrai que la somme des carrés de deux nombres de Fibonacci consécutifs soit toujours un nombre de Fibonacci ?

Le responsable de cette rubrique est philippe.fevotte@wanadoo.fr.
Lui envoyer vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

retour au sommaire