L’ARBRE DE PYTHAGORE EN TERMINALE S

Par Serge Ermisse

Résumé : Cette séquence de travaux pratiques met en œuvre différents outils et différents champs pour répondre à un problème géométrique ouvert.

A L'ORIGINE…

Adhérent APMEP, j’ai la chance de recevoir le bulletin vert. A la lecture de « Un arbre Pythagoricien » de Catherine Combelles (extrait du n° 505), cela m’a donné envie d’exploiter cette situation avec mes élèves.
Étant également enseignant de la spécialité ISN de terminale S, j’y ai également vu des réminiscences de récursivité vue en formation. J’ai d’ailleurs commencé par réaliser, pour mon plaisir, un programme en langage Python qui dessine cette figure pour une étape *n* donnée.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

Développer l’esprit d’initiative, de recherche avec un problème ouvert.

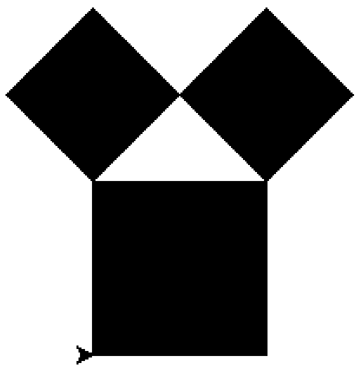
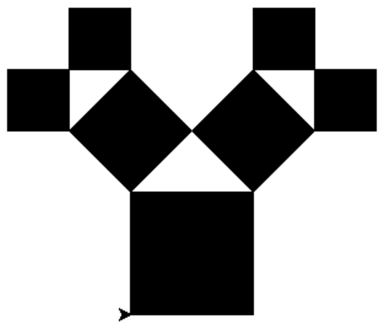
Travailler, sans le dire, la notion de convergence d’une suite ainsi que de la somme de ses premiers termes.

Réinvestir le tableur ou l’algorithmique au service de la résolution de problème.

DESCRIPTION DE L’ACTIVITÉ

Énoncé

A partir d’un carré de côté 4 cm, on construit sur le côté supérieur deux carrés plus petits qui délimitent un triangle rectangle isocèle. A l’étape suivante, on réitère la construction à l’extérieur sur chacun des carrés construits précédemment.

		
Étape n°0	Étape n°1	Étape n°2

<u>Problème</u> :

Aura-t-on assez de place sur notre feuille pour n’importe quelle étape de construction ?

Aides fournies par le professeur :

Aide 1 : Faire une figure en grandeur réelle.

L'objectif est de pouvoir contrôler les premières valeurs. Cette aide a été donnée à un groupe qui obtenait des valeurs fausses.

Aide 2 : Considérer plutôt la hauteur ajoutée à chaque étape.

Cette aide a été fournie à deux groupes qui ne trouvaient pas le processus de récurrence.

Aide 3 : Utiliser des outils numériques.

Mise en situation de la séance

Les élèves se sont installés dans une disposition traditionnelle sur table. Je leur ai présenté le sujet du TP en vidéoprojetant l'énoncé ci-dessus.

Déroulement de la séance et stratégies des élèves

- **Première phase : Recherche individuelle (10 min)**

C'est pour moi une phase essentielle afin de m'assurer que chacun s'est approprié l'énoncé et puisse participer aux échanges lors de la mise en commun en groupe.

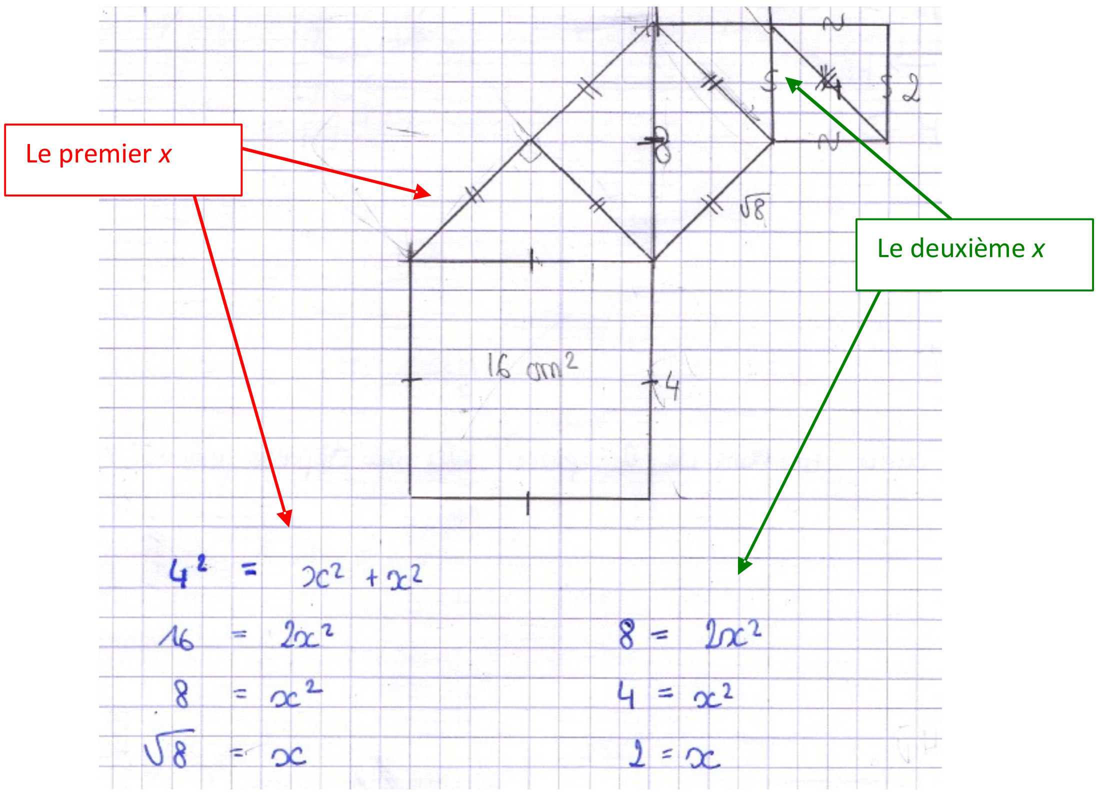
Tous représentent les premières étapes de la construction de la figure en grandeur réelle ou à main levée.

En passant dans les rangs, je constate que pour les élèves qui répondent sur leur feuille, **c'est l'aire qui est en jeu** dans la problématique (cela me semble induit par le coloriage en noir de ma figure) et que peu quantifient cette grandeur, la plupart restant sur des intuitions du type :

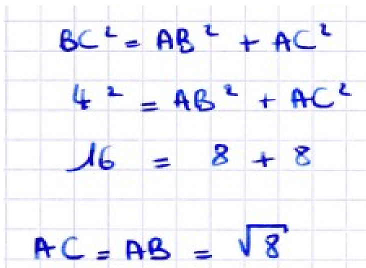
« NON, on n'aura pas assez de place car l'aire devient de plus en plus importante »

« OUI, on aura assez de place car cela devient de plus en plus petit »

Seuls quelques élèves essayent de calculer des longueurs.



Une version moins experte



- **Deuxième phase : Recherche en groupe (40min)**

Je les arrête dans leur recherche individuelle pour orienter la problématique. Je vidéoprojette la figure où il y a chevauchement des surfaces coloriées en noir pour justifier qu'on laisse de côté cette idée : D'autorité, je leur dis que l'on va commencer par étudier la hauteur de l'arbre. Je demande aux élèves de constituer des groupes de 3 ou 4 élèves. Ils doivent résoudre le problème expérimentalement. Contrairement à l'adage, les opposés ne s'attirent pas et la formation des groupes est plutôt homogène. Il est demandé un compte rendu des recherches par groupe.

Tous les groupes partent alors sur le théorème de Pythagore, même un groupe d'élèves faibles qui avaient pourtant l'arbre de Pythagore de l'étape n°4 en grandeur réelle. Est-ce que par contrat tacite, une réponse non prouvée ne correspond pas à l'attente du professeur ? Ils calculent ensuite avec des valeurs approchées (les racines carrées ne sont pas des nombres, c'est bien connu …).

Des groupes cherchent à modéliser par une suite la hauteur totale, d'autres la hauteur ajoutée à chaque étape **(c'est d'ailleurs le conseil que je donne discrètement aux 2 groupes qui n'arrive pas à trouver le processus de récurrence (aide 2))**

	Hauteur qu'on ajoute
Etape 0 : 4 cm de haut	
Etape 1 : 4 + 4 = 8 cm de haut	+ 4
Etape 2 : 10 cm de haut	+ 2
Etape 3 : 12 cm de haut	+ 2
Etape 4 : 13 cm de haut	+ 1
Etape 5 : 14 cm de haut	+ 1
Etape 6 : 14,5 cm de haut	+ 0,5
Etape 7 : 15 cm de haut	+ 0,5
Etape 8 : 15,25 cm de haut	+ 0,25
Etape 9 : 15,5 cm de haut	+ 0,25

Après un temps cumulé de 25 minutes, 3 groupes sur 8 n'ont que quelques valeurs (les 3, 4 ou les 5 premières), les 5 autres ayant ont déjà conjecturé un processus de récurrence.

On a cherché les suites aussi comme :

U_0
U_1 $U_0 + 4$
$U_2 =$ $U_1 + U_0 : 2$
$U_3 =$ $U_2 + U_0 : 2$
$U_4 =$ $U_3 + U_0 : 4$
U_5 $U_4 + U_0 : 4$

La hauteur est composée successivement de carré d'un côté plus d'un diagonal d'un carré
Le diagonal est égale à la longueur du côté du carré précédent
La hauteur est désignée par h_{n-1}

VRAI

Un ça donne la dimension d'un côté d'un carré

étape 2 → 10 } U_{n-1}
3 → 12
4 → 13 } $+U_n$
5 → 14
6 → 14,5 } $+U_{n-1}$

$h_n = h_{n-1} + U_{n-1}$

FAUX

Étape 2 = $8 + \sqrt{4} = 10$.
Étape 3 = $10 + \sqrt{4} = 12$.
Étape 4 = $12 + \sqrt{1} = 13$.
Étape 5 = $13 + \sqrt{1} = 14$.
Étape 6 = $14 + \frac{\sqrt{1}}{2} = 14,5$
Étape 7 = $14,5 + \frac{\sqrt{1}}{2} = 15$.

Pas sûr de la compréhension

On peut remarquer que lorsque l'on passe d'une étape paire à une étape impaire, on ajoute la même hauteur à l'arbre que côté de l'étape précédente. Pour passer d'une étape impaire à paire, on ajoute la moitié de la hauteur de l'étape précédente

Certains ont essayé de conjecturer des formules (du terme général) :

formule explicite = $4 + \frac{4}{2} \times n$

$U_n = \frac{U_{n-1}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}^n}$ U_n ça donne la dimension d'un côté d'un carré

On a pu ainsi en déduire que la hauteur était :
$= 4 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 2 + 1 + 0,5 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} \ldots$

Après un temps cumulé de 35 minutes,

On aura assez de place sur la feuille, car au bout de beaucoup d'étapes, la hauteur ajoutée est tellement petite qu'elle ne dépassera pas 16.

Je vais essayer de « casser » cette image mentale avec la série harmonique.

10 étapes

2 groupes ont trouvé la limite de la hauteur de l'arbre mais uniquement avec quelques étapes à l'aide **d'addition faites à la calculatrice.** Je décide de préciser oralement à tous que l'on est en salle info et qu'ils peuvent se servir des ordinateurs **(aide 3).**

On peut remarquer que lorsque l'on passe d'une étape paire à une étape impaire, on ajoute la même hauteur à l'arbre que l'étape précédente. Pour passer d'une étape impaire à paire, on ajoute la moitié de la hauteur de celle de l'étape précédente

Après un temps cumulé de 50 minutes, voici des productions obtenues :

Exemple sur Excel (4 groupes):

On a utilisé excel mais nous n'avons pas vraiment réussi à l'utiliser.

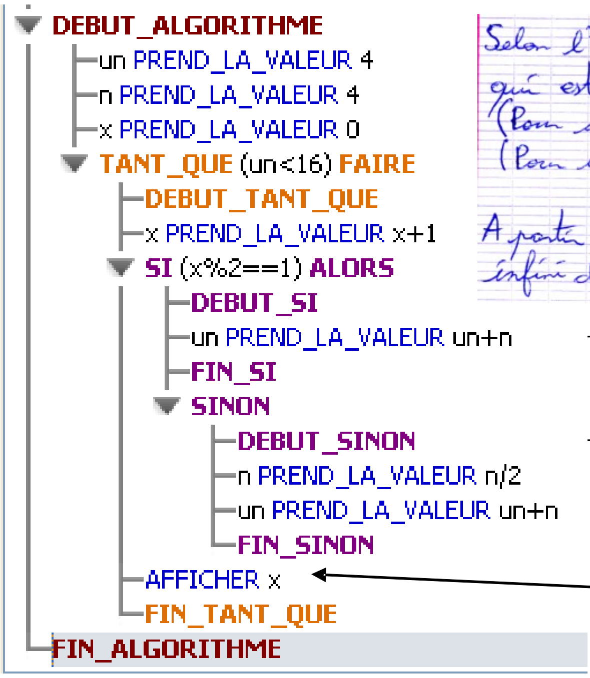
À l'aide du tableur, on a pu en conclure que cette hauteur ne dépassait pas 16 cm et par la même méthode on a pu

	A	B	C	D
1	4	8		
2	2	4		
3	1	2		
4	0,5	1		15,9999695
5	0,25	0,5		
6	0,125	0,25		
7	0,0625	0,125		
8	0,03125	0,0625		
9	0,015625	0,03125		
10	0,0078125	0,015625		
11	0,00390625	0,0078125		
12	0,00195313	0,00390625		
13	0,00097656	0,00195313		

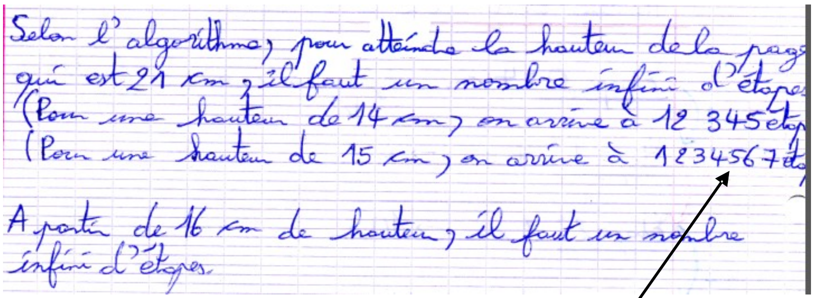
J'ai dû pour 2 groupes donner l'idée du double. Un groupe a trouvé seul et un n'a pas abouti.

retour au sommaire

Exemple sur algobox (3 groupes) :



```
DEBUT_ALGORITHME
  un PREND_LA_VALEUR 4
  n PREND_LA_VALEUR 4
  x PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (un<16) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    x PREND_LA_VALEUR x+1
    SI (x%2==1) ALORS
      DEBUT_SI
      un PREND_LA_VALEUR un+n
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        n PREND_LA_VALEUR n/2
        un PREND_LA_VALEUR un+n
        FIN_SINON
    AFFICHER x
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```



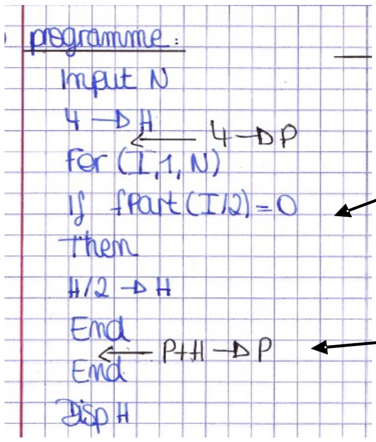
Selon l'algorithme, pour atteindre la hauteur de la page qui est 21 cm, il faut un nombre infini d'étapes
(Pour une hauteur de 14 cm) on arrive à 12 345 étapes
(Pour une hauteur de 15 cm) on arrive à 1234567 étapes

A partir de 16 cm de hauteur, il faut un nombre infini d'étapes.

Les élèves m'ont demandé comment on fait « x impair »

Erreur pour l'affichage mais ils ne s'en sont pas aperçus.

Exemple sur calculatrice (1 groupe) :



```
programme :
Input N
4 → H
4 → P
For (I,1,N)
If fPart(I/2)=0
Then
H/2 → H
End
P+H → P
End
Disp H
```

Les élèves m'ont demandé comment on fait « I est pair »

J'ai du leur dire qu'il fallait cumuler les hauteurs.

Les deux autres groupes n'ont pas abouti.

Troisième phase : Démonstration

Pour l'étape n

$$Hauteur = 4+4+2+2+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+4\times\frac{1}{2^{n-1}}+4\times\frac{1}{2^{n-1}}+4\times\frac{1}{2^{n}}+4\times\frac{1}{2^{n}}$$

-

$$\tfrac{1}{2}\times Hauteur = 2+2+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+4\times\frac{1}{2^{n}}+4\times\frac{1}{2^{n}}+4\times\frac{1}{2^{n+1}}+4\times\frac{1}{2^{n+1}}$$

……………. =

En déduire, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, la hauteur de l'arbre.

Évaluation

2 groupes ont conjecturé la hauteur limite de l'arbre sans aucune aide.

3 groupes ont conjecturé la hauteur limite de l'arbre avec un peu d'aide (numérique).

3 groupes n'ont pas abouti.

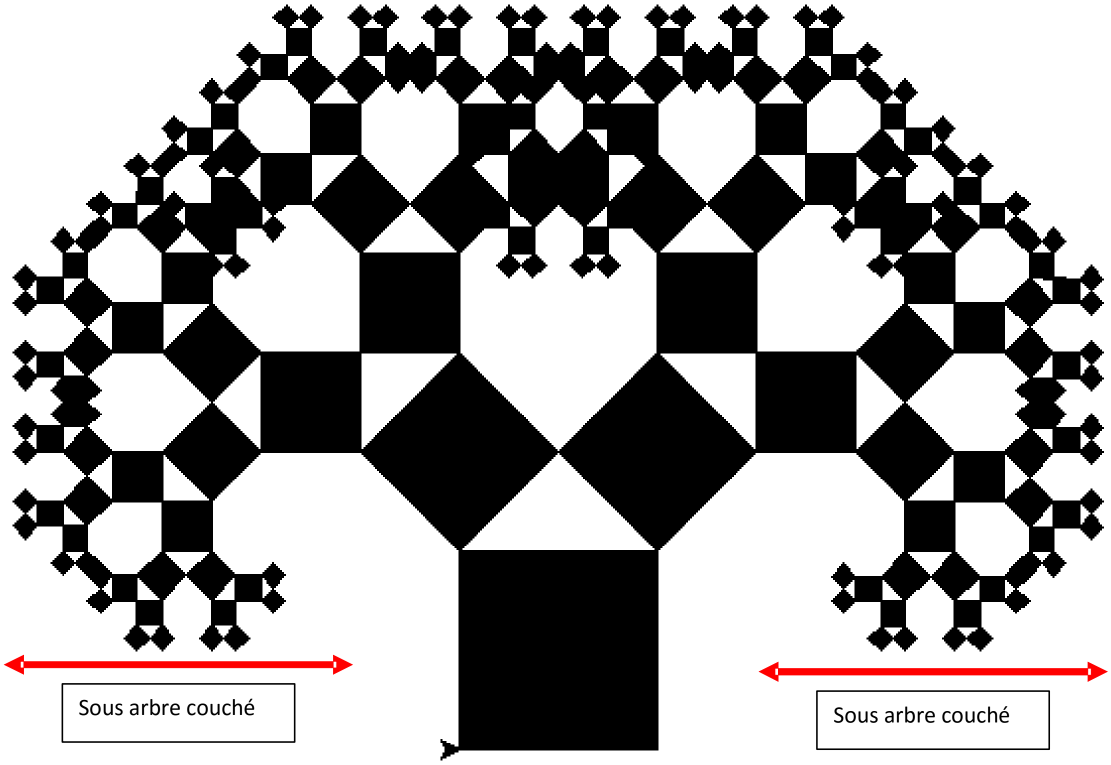
retour au sommaire

Mais on peut dire qu'ils ont tous :

- Développé leur esprit d'initiative, de recherche.
- Travaillé la notion de convergence d'une suite ainsi que celle de la somme de ses premiers termes.
- Réinvesti le tableur ou l'algorithmique au service de la résolution de problème.

Remarque : 1 groupe a même conjecturé la largeur.

Un bilan sera fait au prochain TD (souvent, je le fais en classe entière l'heure suivante) ainsi que la démonstration de la somme (3ème phase).



BROCHURES EN LIGNE

Un certain nombre de nos anciennes brochures régionales sont épuisées. Nous n'avons pas prévu de les rééditer en version papier. Par contre, nous avons décidé de mettre à votre disposition des versions PDF, téléchargeables sur notre site http://apmeplorraine.fr/.

« Travail de groupe en séquences longues (démarche de recherche sur problèmes ouverts) avec un index des fiches et des mots clés (76 pages).

« Maths et arts » : réédition en couleurs (l'original était en noir et blanc) avec quelques compléments et une sitographie très étoffée (138 pages).

« Avec des pentaminos », de François Drouin, avec un peu de couleur et une table des matières interactive (133 pages).

Et aussi « Le nombre d'or et la cathédrale de Metz » : une reprise d'une partie d'une publication de l'IREM de Lorraine (99 pages).

retour au sommaire