SOLUTION DU PROBLÈME N°129

Rappel de l'énoncé (de Jacques Choné)

On considère, pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, la matrice carrée d'ordre *n*, $S(n)$, formée "en serpent" par les nombres $1,2,\ldots,n^2$. Par exemple, $S(2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$ et $S(3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\6 & 5 & 4\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang, le déterminant et la trace de $S(n)$.

2. On prend *n* termes de $S(n)$ de telle façon qu'un terme soit choisi dans chaque ligne et dans chaque colonne. Quel est l'ensemble des valeurs des sommes que l'on peut obtenir en ajoutant ces *n* termes ?
Comparer le résultat avec celui correspondant à la même démarche effectuée sur la matrice carrée d'ordre *n*, $M(n)$ formée par les nombres $1,2,\ldots,n^2$ où les termes de chaque ligne sont rangés par ordre croissant: par exemple, $M(2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ et $M(3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

Solution

1. Soit C_1 la première colonne de $S(n)$ et U le vecteur colonne transposé de $(1,-1,\ldots,(-1)^{n-1})$ Ces deux vecteurs sont indépendants et toute colonne de $S(n)$ est combinaison linéaire de ces deux vecteurs. Donc le rang de $S(n)$ est 2 et son déterminant pour $n \geq 3$ est nul. Par ailleurs $det(S(2))=-5$.

Le terme, $S(n)_{i,j}$ de la ligne *i*, colonne *j* de $S(n)$ est $n(i-1)+j$ si *i* est impair et $ni+1-j$ si *i* est pair. Donc $S(n)_{i,i}=\begin{cases} n(i-1)+i & si \quad i \quad est \quad impair\\ ni+1-i & si \quad i \quad est \quad pair\end{cases}$.

Si *n* est pair, on a :

$$trace(S(n))=1+(2n-1)+(2n+3)+(4n-3)+\ldots+((n-2)n+n-1)+(n^2+1-n)$$
$$=2(2n+4n+\ldots+(n-2)n)+n^2=\frac{n^3}{2}$$

Si *n* est impair, on a :

$$trace(S(n))=1+(2n-1)+(2n+3)+(4n-3)+\ldots+((n-1)n-(n-2))+(n(n-1)+n)$$
$$=2(2n+4n+\ldots+(n-3)n)+(n-1)n+n^2=\frac{n^3+n}{2}$$

2. Commençons par étudier la situation pour la matrice $M(n)$ dont le terme général est $M(n)_{i,j}=(i-1)n+j$.

Si σ est une permutaion de $\{1,\ldots,n\}$, la somme étudiée associée à σ est

$$\sum_{i=1}^{n}((i-1)n+\sigma(i))=n\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

retour au sommaire

Donc, pour $M(n)$, les sommes obtenues sont indépendantes de σ et l'ensemble étudié se réduit au singleton $\left\{\frac{n(n^2+1)}{2}\right\}$.

Étudions maintenant la situation pour $S(n)$ dont le terme général est

$$S(n)_{i,j}=\begin{cases} n(i-1)+j & si \quad i \quad est \quad impair \\ ni+1-j & si \quad i \quad est \quad pair \end{cases} .$$

Si σ est une permutaion de $\{1,\dots,n\}$ la somme étudiée associée à σ est

$$\begin{aligned} s(n,\sigma) &= \sum_{i=1}^{n}(i-1)n+\sum_{i\ impair\geq 1}^{i\leq n}\sigma(i)+\sum_{i\ pair\geq 1}^{i\leq n}(n+1-\sigma(i)) \\ &= \frac{n^2(n-1)}{2}+(n+1)\left[\frac{n}{2}\right]+\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)-2\sum_{i\ pair\geq 1}^{i\leq n}\sigma(i) \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2}+(n+1)\left[\frac{n}{2}\right]-2\sum_{i\ pair\geq 1}^{i\leq n}\sigma(i) \end{aligned}$$

Si $n=2m$ est pair, la plus petite valeur que peut prendre $\sum_{i\ pair\geq 1}^{i\leq n}\sigma(i)$ suivant le choix de σ est $1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}$ et la plus grande $(m+1)+(m+2)+\ldots+2m=\frac{m(3m+1)}{2}$ et toute valeur intermédiaire peut être prise car si $\{\sigma(i) \ / \ i \ pair\}\neq\{m+1,\dots,2m\}$ il existe une des valeurs de ces $\sigma(i)$ telle $\sigma(i)+1$ ne soit pas dans l'ensemble ce qui permet d'obtenir une nouvelle permutation σ' fournissant une somme augmentée de 1.

On en déduit que l'ensemble demandé dans le cas ou *n* est pair est

$$\left\{\frac{n(2n^2-n+2)}{4}+2i \ / \ i\in\left\{0,1,\dots,\frac{n^2}{4}\right\}\right\}$$, ensemble ayant $\frac{n^4}{4}+1$ éléments.

On trouve de même que l'ensemble demandé dans le cas ou *n* est impair est

$$\left\{\frac{2n^3-n^2+2n+1}{4}+2i \ / \ i\in\left\{0,1,\dots,\frac{n^2-1}{4}\right\}\right\}$$ ensemble ayant $\frac{n^4-1}{4}+1$ éléments.

LE PROBLÈME DU TRIMESTRE N°130

Proposition de problème

(de Philippe Févotte)

On considère un cercle C de rayon 1, un point *A* intérieur au cercle C, un point *B* extérieur à ce cercle ainsi qu'une longueur *l* donnée.

Peut-on déterminer deux points *M* et *N* du cercle C tels que les droites (*AM*) et (*BN*) soient parallèles et *MN* = *l* ?

Le responsable de cette rubrique est philippe.fevotte@wanadoo.fr.

Lui envoyer vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

retour au sommaire