ÉTUDE MATHÉMATIQUE

POURCENTAGES, PRÊTS ET EMPRUNTS

Par Alain SATABIN,
Lycée Gaspard Monge, Charleville

Pourcentages sans peine

Un pourcentage est en fait une façon d'écrire une fraction, en ramenant le dénominateur à 100. Autrement dit, un pourcentage peut être considéré comme un nombre de centièmes. Par exemple, 12 % n'est rien d'autre que 0,12, c'est à dire douze centièmes.
La touche **%** figurant sur certaines calculatrices est totalement inutile et, pire, complique les choses en occultant la réelle signification d'un pourcentage. De plus, certains problèmes relatifs aux pourcentages sont infaisables en utilisant la touche soit disant prévue à cet effet. Dans ce qui suit, nous n'utiliserons donc qu'une calculatrice simple, munie des 4 opérations habituelles.
Les pourcentages sont utilisés dans différents registres qui vont être examinés aux travers d'exemples dans ce chapitre.

1.1 Partie d'un tout

C'est l'utilisation la plus naturelle d'un pourcentage, rapportant une proportion à la même taille d'échantillon afin d'établir une comparaison.

1.1.1. Si dans un groupe de 60 personnes, il y a 15 fumeurs, on peut dire qu'il y a 1 personne sur 4 qui fume, ou encore que la proportion de fumeurs est de $\frac{1}{4}$. Si la même proportion est conservée sur une assemblée de 100 personnes, il y a alors 25 fumeurs (1 sur 4). Donc la proportion est aussi de $\frac{25}{100}$, ce qui se dit 25%.

Réciproquement, si sur les 540 habitants d'un village, il y a 45% de femmes, cela signifie que le nombre de femmes est obtenue en multipliant le tout par 0,45 (45 centièmes). Il y a donc dans ce village 0,45x540 = 243 femmes.

1.1.2. Le prix d'un objet est de 349 € dont 32% sont des frais de commercialisation. Ces derniers s'élèvent donc à 349 €x0,32 = 111,68 €.

1.1.3. Si, dans une assemblée, il y a 47% de femmes et que, parmi elles, 23% sont blondes, cherchons le pourcentage de femmes blondes dans cette assemblée. Pour résoudre ce genre de problème, il faut bien comprendre que le nombre de personnes dans l'assemblée n'a strictement aucune importance.
Néanmoins, pour fixer les idées, supposons qu'il y ait 10 000 personnes[4] .
Il y a alors 10000x0,47 = 4700 femmes, et parmi elles 4700x0,23 = 1081 blondes.
La proportion de blondes sur toute l'assemblée est donc de $\frac{1081}{10000}=10{,}81$.
Le "10 000" est peu important et seule compte la multiplication par 0,47 puis par 0,23.
0,47x0,23 = 0,1081 permet de conclure directement qu'il y a 10,81% de femmes blondes dans l'assemblée.

1.1.4. Le problème suivant, pourtant courant, est un peu plus "piégeux" : 37,5% des habitants d'une ville sont retraités et, par ailleurs, 18,3% des habitants de cette ville sont des retraités non-imposables.
Le problème est de déterminer le pourcentage de non-imposables parmi les retraités.
On voit ici la nécessité de bien préciser par rapport à quel ensemble on se place lorsqu'il est question de pourcentages. Il ne faut en effet pas confondre « 18,3% des habitants sont des retraités non-imposables » et « 18,3% des retraités sont non-imposables ». La première phrase est vraie (c'est l'énoncé), alors que la deuxième est fausse ... c'est justement le pourcentage cherché.
Une première méthode consiste à prendre un exemple. Supposons qu'il y ait 1000 habitants. Cela fait 375 retraités et 183 retraités non imposables. Donc la proportion cherchée est $\frac{183}{375}=48{,}8$.

[4] Histoire de ne pas couper les gens en morceaux !

retour au sommaire

Le nombre d'habitants importe peu puisque la proportion x cherchée doit vérifier 0,375x x = 0,183.

On retrouve ainsi $x=\frac{0,183}{0,375}=0,488$ et donc, dans cette ville, 48,8% des retraités sont non-imposables.

Pour conclure cette partie, une remarque simple s'impose : quand il s'agit de proportion, un pourcentage ne peut dépasser 100% en vertu du fait qu'une partie ne peut être supérieure au tout qui la contient !

Par ailleurs, des pourcentages ne peuvent s'ajouter que s'ils sont calculés par rapport à un même tout. Par exemple, si dans une assemblée, il y a 12% qui sont des "hommes fumeurs" et que 61% des femmes fument, il serait stupide d'ajouter ces deux pourcentages pour obtenir la proportion de personnes qui fument, puisque le premier est calculé par rapport à l'ensemble de l'assemblée, alors que le second est calculé par rapport à l'ensemble des femmes uniquement.

Pourcentage d'augmentation

Celui qui a eu l'idée d'introduire la notion de pourcentage dans les augmentations (et les diminutions) aurait mieux fait de rester couché ! Cela complique les choses et rend certains problèmes ardus alors qu'ils cachent des vérités toutes simples. C'est pourquoi je me ramènerai systématiquement à la notion de *coefficient multiplicateur* qu'on va découvrir au travers des exemples.

1.2.1. Un objet coute 112 €. Il augmente de 15%. C'est à dire de 112 €x0,15 = 16,80 €.
Il coute donc 128,80 €. Jusque là, ça va !
Analysons à rebours l'opération que nous venons de faire, c'est à dire le calcul suivant : 128,80 = 112+16,80 = 112+112x0,5 = 112x(1+0,15) = 112x1,15
Le fait que l'objet coute 112 € au départ n'est pas le plus important. Par contre, on voit que le calcul du prix après augmentation se ramène tout simplement à une multiplication par 1,15. En clair, une augmentation de 15% revient à appliquer un coefficient multiplicateur de 1,15.
Après augmentation, l'objet coute 112 €x1,15 = 128,80 €[5].

1.2.2. La règle suivante me parait donc importante, voire indispensable dans certains exemples futurs :

Augmenter une quantité de *x*% revient à la multiplier par le coefficient $\left(1+\frac{x}{100}\right)$.

1.2.3. Voici quelques exemples :

- Augmenter de 3% revient à multiplier par1+0,3 c'est à dire par 1,03.
- Augmenter de 45% revient à multiplier par 1+0,45 c'est à dire par 1,45.
- Un salaire de 7530 € qui augmente de 2,5% passe à 7530 €x1,025 = 7718,28 €.
- Pendant un temps, l'inflation mensuelle en Pologne était de 250% par mois ! Cela signifie que chaque mois, les prix étaient multipliés par $\left(1+\frac{250}{100}\right)$, c'est à dire 3,5. Un produit coutant 12 Zlotys coutait un mois plus tard 12 Zlotys x3,5 = 42 Zlotys.

1.2.4. On voit que lorsqu'il s'agit de pourcentage d'augmentation, celui-ci peut être supérieur à 100 :

- Augmenter de 100% revient à multiplier par 1 + 1 c'est à dire par 2
- Augmenter de 325% revient à multiplier par 1 + 3, 25 c'est à dire par 4, 25

1.2.5. Le principe de calcul réside dans cette formule simple :

(Ancienne valeur)* x *(Coefficient multiplicateur) = (Nouvelle valeur)

1.2.6. Exemple. Un prix est passé de 456 € à 670,32 €. Quel est le pourcentage d'augmentation[6] ?
Pour répondre à la question, il suffit de connaître le coefficient multiplicateur qui permet de passer de 456 à 670,32.
C'est tout simplement le rapport $\frac{\text{Ancienne valeur}}{\text{Nouvelle valeur}}$ c'est à dire ici $\frac{670{,}32}{456}$.

[5] Vous voyez bien que la touche "%" des calculettes est inutile !

[6] Voilà typiquement le genre de question difficilement faisable avec la touche "%" d'une calculette

retour au sommaire

Un petit coup de calculette donne ici 1,47 (en effet, on a 456x1,47 = 670,32).
On interprète ensuite ce coefficient sous la forme (1 + *quelque chose*) pour obtenir le pourcentage.
Ici, il vaut (1+0,47) , c'est à dire $\left(1+\frac{47}{100}\right)$, donc l'augmentation est de 47%.

1.2.7. Autre exemple. Après une augmentation de 27%, un article coute 1 073,15 €. Quel était son prix initial?
L'augmentation de 27% correspond à une multiplication par 1,27. Donc on a :

$$(\text{Ancien prix})\times 1{,}27 = 1073{,}15 \Rightarrow \text{Ancien prix} = \frac{1073{,}15}{1{,}27} = 845$$

L'article coutait donc 845 € avant augmentation.

1.2.8. Une application pratique de ce coefficient multiplicateur est le calcul d'intérêts composés, c'est à dire lorsque les intérêts d'un capital placé sont cumulés en fin de période au capital, et contribuent donc à produire des intérêts dans la période suivante.

Plaçons 12 000 € sur un compte épargne à 4,5% par an, à intérêts composés.

Chaque année, la somme contenue par le compte est multipliée par 1,045 (elle augmente de 4,5% et les intérêts sont capitalisés).

Au bout d'un an nous aurons 12 000 €x1,045 = 12 540 €,

au bout de 2 ans nous aurons 12 540 €x1,045 = 12 540 €x1,045x1,045 = 13 104,30 €,

au bout de 3 ans nous aurons 13 104,30 €x1,045 = 12 000 €x$(1{,}045)^3$ = 13 693,99 €,

ce qui permet de comprendre que pour avoir le capital obtenu au bout de 5 ans, il suffit de multiplier la somme de départ 5 fois de suite par 1,045, c'est à dire par $(1{,}045)^5$.

On obtient donc un capital final de 14 954,18 €.

1.2.9. Si dans un pays le taux d'inflation annuel est de 2,5%, chaque année, les prix sont multipliés par 1,025. Donc sur 10 ans, un prix donné a été multiplié par $(1{,}025)^{10}$, ce qui fait environ 1,28. Cela correspond à une inflation par décennie de 28%.
Vous remarquerez que lorsqu'on pose la question au premier venu[7] , la réponse la plus courante[8] est 25%, correspondant à la multiplication dénuée de sens de 2,5% par 10.

Pourcentage de diminution

1.3.1. Le principe est sensiblement le même que dans la section précédente. Prenons le cas d'un commerçant qui fait 15% de remise sur un article de 514 €. Il fait donc cadeau de 514x0,15 = 77,10 €, ce qui donne un prix final de 514 € - 77,10 € = 436,90 €.

1.3.2. Le calcul précédent se résume globalement à : 514 - 514x0,15 ou 514x(1 - 0,15) .

La diminution de 15% équivaut donc à une multiplication par (1 - 0,15), c'est à dire 0,85.

1.3.3. Par le même procédé, la population d'un village de 975 habitants qui baisse de 32% se voit multipliée par (1 - 0,32), c'est à dire par 0,68, et devient donc égale à 975 habitantsx0,68 = 633 habitants.

1.3.4. La règle en matière de diminution est donc analogue à celle des augmentations :

Diminuer de *x*% revient à multiplier par $\left(1-\frac{x}{100}\right)$

et (*Ancienne valeur*) x (*Coefficient multiplicateur*) = (*Nouvelle valeur*).

1.3.5. Exemple : Un prix passe de 510 € à 450 €. Quel est le pourcentage de diminution?
Le coefficient multiplicateur vaut $\frac{\text{Nouvelle valeur}}{\text{Ancienne valeur}} = \frac{450}{510} \approx 0{,}882 = 1-0{,}118 = 1-\frac{11{,}8}{100}$ donc ce prix a baissé de 11,8%.

1.3.6. On remarquera que lorsque le coefficient multiplicateur est supérieur à 1, cela correspond à une augmentation et on écrit ce coefficient sous la forme $\left(1+\frac{x}{100}\right)$ pour obtenir le pourcentage d'augmentation, alors que lorsqu'il est inférieur à 1, cela correspond à une diminution et on écrit ce coefficient sous la forme $\left(1-\frac{x}{100}\right)$ pour avoir le pourcentage de diminution.

[7] Ça marche aussi avec le deuxième

[8] Ce qui prouve une fois de plus qu'il ne suffit pas d'être majoritaire pour avoir raison !

retour au sommaire

1.3.7. Autre exemple : Le prix du disque compact a été divisé par 4 en quinze ans. À quel pourcentage de diminution cela correspond-il ? Le prix a été multiplié par 0,25, c'est à dire (1 - 0,75), donc le prix a baissé de 75% en 15 ans.

1.3.8. Remarquons que, contrairement à un pourcentage d'augmentation, un pourcentage de diminution ne peut excéder 100%.

En effet, une baisse de 100% correspond à une multiplication par $\left(1-\frac{100}{100}\right)$, c'est à dire par zéro. Si un produit baisse de 100%, il devient donc gratuit ![9]

1.3.9. Après une remise de 20%, un article coute 720 €. Quel était son prix initial?
La remise de 20% ayant multiplié le prix par (1 - 0,20), c'est à dire 0,8.

$$(Prix\ initial)\times 0{,}8=720 \Rightarrow (Prix\ initial)=\frac{720}{0{,}8}=900$$

Le produit coutait donc 900 € avant la remise.

Quelques "mélanges"

1.4.1. Pour compenser une hausse récente de 15%, un commerçant vous fait une remise de 15% sur les nouveaux tarifs. Qu'en pensez-vous ?

Prenons le cas d'un objet qui valait 2000 € avant la hausse.

Après la hausse, il vaut 2000x1,15 = 2300 €. C'est le nouveau tarif.

Sur ce prix, il vous fait 15% de remise : vous payez donc 2300 €x0,85 = 1955 €, moins que le prix initial.

Moralité : Vous êtes gagnant[10] ! une baisse de ***x*** % ne compense pas une hausse de ***x*** %.

1.4.2. On peut se poser la question subsidiaire de savoir à quel pourcentage de variation correspond la hausse de 15% suivie d'une baisse de 15%.

On multiplie d'abord par 1,15 (hausse de 15%) , puis par 0,85 (baisse de 15%).

Donc finalement, on a multiplié par 1,15x0,85 = 0,9775 = 1-0,0225, c'est à dire qu'on a globalement affaire à une baisse de 2,25%.

1.4.3. Question subsidiaire bis ... Quelle remise doit-on faire pour compenser la hausse de 15% ?
Cette hausse a multiplié les prix par 1,15.
Donc, pour l'anéantir, il faut diviser les nouveaux tarifs par 1,15, c'est à dire les multiplier par $\frac{1}{1{,}15}$ soit environ (1 - 0,1304) ≈ 0,8696. Donc, pour compenser la hausse de 15%, on doit faire une remise de 13,04%... et pas de 15% !

1.4.4. Question subsidiaire ter : Quelle hausse compense une baisse de 15% ?[11]
Reprenons le même raisonnement : une baisse de 15% correspond à une multiplication par 0,85. Donc pour l'annihiler, il faut diviser par 0,85

c'est à dire multiplier par $\frac{1}{0{,}85}\approx 1{,}1765=1+0{,}1765$ ce qui correspond à une augmentation de 17,65%. Voilà la hausse qui compense une baisse de 15%.

1.4.5. Ne disons pas n'importe quoi : je suis un jour tombé sur un commerçant qui m'expliquait à grand renfort d'arguments qu'il me faisait la remise de 10% avant de compter la TVA car c'était plus intéressant pour moi, la TVA étant ainsi calculée sur un prix moindre. Le doute a été semé dans son esprit quand je lui ai signalé que s'il comptait la remise sur le prix TTC, celle-ci serait plus forte !

Réfléchissons un peu.

Appliquer une TVA de 20% revient à multiplier par 1,20.

Quant à sa remise de 10%, elle multiplie le cout par 0,90.

9 Et s'il baisse de 150%, son prix est multiplié par (-0,5) et son cout devient négatif ... on vous donne de l'argent avec !

10 Cela m'est arrivé une fois, je le savais, j'ai rien dit ... il n'avait qu'à écouter à l'école !

11 Non ... la réponse n'est pas une augmentation de 13,04%... et encore moins 15%

retour au sommaire

Alors, multiplier d'abord par 0,9 et ensuite par 1,2 ou d'abord par 1,2 et ensuite par 0,9 ... c'est pas pour dire, mais il me semble que cela revient au même ![12]

1.4.6. La population d'un village a augmenté de 2% en 1990, de 3% en 1991, puis diminué de 5% en 1992 et 2% en 1993 avant de ré-augmenter de 5% en 1994.
Quel est la variation, en pourcentage, sur les cinq ans ?
Le piège à éviter est évidemment d'ajouter ou soustraire tous ces pourcentages. Cela ne rime strictement à rien puisqu'ils ne sont pas calculés sur la base de la même quantité ; en effet, la population change et le taux de 5% en 1994 ne correspond pas au même nombre de personnes que le taux de 5% en 1992.
Une fois de plus, les coefficients multiplicateurs vont nous mener simplement au résultat : la population a été multipliée par 1,02 en 1990, par 1,03 en 1991, par 0,95 en 1992, par 0,98 en 1993 et enfin par 1,05 en 1994.
Finalement, sur les 5 ans, elle est multipliée par 1,02x1,03x0,95x0,98x1,05 ≈ 1,027, ce qui correspond à une augmentation de 2,7%. C'est la réponse.

1.4.7. Un petit dernier pour la route ! Une valeur boursière suit les fluctuations suivantes.

lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
+2,7 %	–1,8 %	–3,4 %	+0,7 %	–1,1 %	+2,1 %	–0,9 %

Quelle est la variation globale sur la semaine?

Déterminez les coefficients **multiplicateurs** pour chaque jour de la semaine et multipliez-les, comme dans l'exemple précédent. Vous obtiendrez ainsi la coefficient multiplicateur pour la semaine, c'est à dire environ 0,981. Ce qui fait que, globalement sur la semaine, cette action a baissé d'environ 1,9%.

1.5. Quelques paradoxes

En matière de statistiques, les résultats sont parfois surprenants et contre-intuitifs...
En voici deux exemples.

1.5.1. Quand les parties ne reflètent pas le tout.

Imaginons un pays divisé en régions et que, dans chacune d'entre elles, un enseignant consomme statistiquement plus de légumes "bio" qu'un non-enseignant. N'est-on pas tenté de conclure que dans ce pays, un enseignant mange plus de légumes "bio" qu'un non-enseignant ? Nous avons tort !
Prenons un cas simplifié pour apprendre à se méfier de ce genre de conclusion hâtive[13] :

- *Région 1* : 10 enseignants (resp. 90 non-enseignants) consomment en moyenne chacun 130 kg (resp. 120 kg) de légumes "bio" par an
- *Région 2* : 50 enseignants (resp. 50 non-enseignants) consomment en moyenne chacun 90 kg (resp. 80 kg) de légumes "bio" par an.

Nous sommes bien dans le sujet puisque autant dans la région 1 que dans la 2 , un enseignant consomme plus de légumes "bio" qu'un non-enseignant de la même région.

Sur le regroupement de ces deux régions, nous avons :
- 60 enseignants qui consomment en tout 5800 kg de légumes "bio", soit environ 97 kg par personne en moyenne ;
- 140 non-enseignants consommant en tout 14800 kg de légumes "bio", soit environ 106 kg par personne en moyenne.

Et donc, globalement, un non-enseignant mange en moyenne plus de légumes "bio" qu'un enseignant. Amusant, non ?

[12] Le plus drôle est qu'ayant fait les deux calculs, et ayant trouvé la même chose, il m'a soutenu que c'était un hasard !

[13] Exemple emprunté à Joseph Klatzmann dans son livre *Attention Statistiques*

retour au sommaire

1.5.2 Pas de raison de paniquer !

C'est également un grand classique, mais un incontournable.
Considérons une maladie qui touche une personne sur mille dans la population.
Un test de dépistage est mis au point et, pour connaitre son taux de performance, on le teste sur des échantillons de personnes pour lesquelles on connait déjà le résultat :

- sur 100 personnes saines, le test renvoie 95 résultats négatifs et 5 résultats positifs ;
- sur 100 personnes atteintes par la maladie, le test renvoie 95 résultats positifs et 5 négatifs.

Pour résumer, on dira que son taux de fiabilité est de 95%.
Prenons une personne au hasard dans la population et imaginons que le test donne un résultat positif sur cette personne. Quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte par la maladie ?
Nous serions tenté de dire 95%, mais là encore nous aurions tort !
Imaginons que la scène se passe dans une ville de 20 000 personnes.
Nous avons donc 20 personnes atteintes par la maladie, dont 19 auraient un test positif (correct) et 1 aurait un test négatif (erroné).
Et 19 980 personnes sont saines, parmi lesquelles 999 obtiendraient un test positif (erroné) et 18 981 auraient un résultat négatif (correct).
La personne voyant son test positif appartient donc à un groupe de 19 personnes+999 personnes = 1018 personnes, parmi lesquelles seules 19 sont atteintes pas la maladie.
La probabilité qu'elle soit atteinte par la maladie est donc de $\frac{19}{1018}$, c'est à dire environ 2%. Pas de raison de paniquer donc !

Prêts et emprunts

Nous allons aborder dans cette partie une application un peu plus "velue" des pourcentages, exigeant une bonne connaissance des suites géométriques et des études de fonction.
Notre propos concerne ici un prêt à intérêts composés[14] (ou emprunt vu de l'autre côté) à taux constant avec remboursements périodiques à terme échu. Il est caractérisé par divers paramètres :

- le **capital** : la somme prêtée ;
- le **taux** : supposé ici constant d'une période à l'autre ;
- la **durée** : le nombre de périodes, donc de remboursement ;
- le **remboursement** : le montant remboursé à chaque fin de période.

Débarrassons-nous d'un cas trivial

Le cas d'un prêt sans intérêt[15] ($t = 0$) est particulièrement simple à traiter puisque le montant d'un remboursement est le quotient du capital par le nombre de remboursements : $m=\frac{c}{n}$.
Cela étant dit, dans la suite nous nous placerons systématiquement dans le cas $t > 0$.

Parlons taux sans tarder

Souvent, les taux d'emprunt sont donnés en « taux annuel ». Or, pour calculer des remboursements périodiques (par exemple mensuels), il nous faut connaître le « taux périodique ».

Par exemple, fixer le taux d'un prêt à 2% par mois (dans le cas de remboursements mensuels) revient à placer une certaine somme à intérêts composés de 2% par mois. Cette somme se trouve multipliée par 1,02 chaque mois. En un an, elle sera multipliée 12 fois de suite par 1,02 et donc finalement multipliée par $1{,}02^{12} \approx 1{,}268$. Ce facteur multiplicateur annuel correspond à un taux de 26,8% représentant donc le taux annuel[16].

[14] À chaque fin de période, les intérêts sont cumulés au capital, et donc vont aussi fructifier pendant les périodes suivantes

[15] Et pourtant très intéressant pour l'emprunteur !

[16] C'est du vol patenté, mais ce n'est qu'un exemple !

retour au sommaire

Réciproquement, considérons un taux annuel de 7%, c'est à dire un multiplicateur de 1,07 par an. A quel taux mensuel correspond-il ? Zatise ze couestionne !
L'opération réciproque de « élever à la puissance 12 » porte le doux nom de « racine douzième » et est notée en mathématique grâce au charmant symbole $\sqrt[12]{\cdots}$. Elle est également connue dans les milieux autorisés sous le nom de « puissance un douzième » et peut alors être calculée avec l'opérateur « puissance » d'une calculatrice à condition de ne pas oublier les indispensables parenthèses autour du « un douzième » en puissance.

La séquence de touches suivante vous donne le résultat 1,0057.

1 . 0 7 ^ (1 / 1 2) =

Voilà le coefficient multiplicateur mensuel, ce qui donne un taux mensuel de 0,57%.
Évidemment, le « 12 » correspond au nombre de périodes sur une année. Pour jongler entre des taux annuels et des taux trimestriels, il sera remplacé par un « 4 ».
Pour en finir sur le sujet et pour les amateurs de formule « bling-bling », en notant CMA et CMP les coefficients multiplicateurs respectivement annuel et périodique :

$$\text{CMA} = \text{CMP}^{\text{nombre de périodes par an}}$$

et, dans l'autre sens, $\text{CMP} = \text{CMA}^{\frac{1}{\text{nombre de périodes par an}}}$.

Ce qu'il faut savoir sur les suites géométriques

Une *suite géométrique* est une suite de nombres dans laquelle un terme est obtenu à partir du précédent en multipliant par un nombre constant, appelé la *raison*.
Par exemple, la suite de nombres 5, 10, 20, 40, 80 ... est une suite géométrique de premier terme 5 et de raison 2.
Le calcul d'une somme de termes en progression géométrique se résume en une formule :

$$\text{somme d'une progression géométrique} = \frac{\text{premier terme} \times \text{raison}^{\text{nombre de termes}} - 1}{\text{raison} - 1}$$

Par exemple (sur une suite de termes en progression géométrique de raison 3) :

$$2+6+18+54+162+486+1458 = \frac{2\times3^7-1}{3-1} = \frac{2\times2186}{2} = 2186$$

Le lien avec les placements (ou emprunts et autres prêts du même métal) est, par exemple, que si une somme de 500 € est placée sur un compte rémunéré à intérêts composés de 2% par an, elle se voit multipliée chaque année par 1,02. Donc, et encore par exemple, au bout de 5 années, elle aura engendré un capital de $500\text{x}1{,}02^5 \approx 552{,}04$ €.

Bon, passons aux choses sérieuses !

Un exemple pour la route

Je prête une somme de 10 000 € sur une période de 2 ans au taux annuel de 4,9% avec remboursements constants mensuels à terme échu.
Le capital vaut 10 000, la périodicité 1 (mois) et le nombre de termes est de 24.
Si j'avais placé ce capital au taux mensuel de 0,4%, j'aurais eu au final $10000\text{x}1{,}004^{24}$
≈ 11 005,48 €.
Pour une *valeur actuelle* de 10 000 € ma *valeur acquise* serait de 11 005,48 €.
Mais je ne place pas cette somme puisque je la prête ! Alors je veux bien être gentil, mais j'aimerais avoir récupéré mes billes à la fin de l'histoire.
Mon débiteur va me rembourser en fin de chaque mois une certaine mensualité *m*.
Accrochez-vous !
À la fin du premier mois je touche donc *m* € ... que je m'empresse de placer sur un compte rémunéré au taux fixé pour qu'elle travaille un peu (la fainéante). Cette somme va donc faire des petits pendant 23 mois pour me rapporter au bout du compte $m\text{x}1{,}004^{23}$ €.
À la fin du deuxième mois je touche derechef *m* € et cette somme va maintenant travailler pour moi durant 22 mois pour donner naissance à $m\text{x}1{,}004^{22}$ €.

Le remboursement du troisième mois, lui, ne fructifiera que sur 21 mois pour fournir $m×1,004^{21}$ €. Et ainsi de suite.
Jusqu'au remboursement du 23ième mois qui ne va bosser qu'un mois pour donner $m×1,004^{1}$ € et enfin le dernier, celui du 24ième qui ne va rien faire du tout et rester tel quel puisque le prêt est arrivé à son terme.
Si je résume, à la fin du prêt, mon avoir est donc de :

$$m\times 1{,}004^{23}+m\times 1{,}004^{22}+m\times 1{,}004^{21}+\cdots+m\times 1{,}004^{1}+m$$

Cela est une somme de progression géométrique de raison 1,004 et de premier terme *m* (oui, bon, elle est écrite dans l'autre sens mais ça change quoi ?), qui comporte 24 termes. J'ai donc, au final, récupéré :

$$\frac{m\times 1{,}004^{24}-1}{1{,}004-1}=\frac{m\times 1{,}004^{24}-1}{0{,}004}=m\times 250\times(1{,}004^{24}-1)\approx m\times 25{,}1371$$

Si je veux que cela corresponde exactement à la valeur acquise que j'aurais eue en ne prêtant pas cet argent, je dois avoir :
Voilà le montant arrondi des mensualités : 437,82 €.

$$m=\frac{10\,000\times 1{,}004^{24}}{250\times(1{,}004^{24}-1)}=4\frac{0\times 1{,}004^{24}}{1{,}004^{24}-1}\approx 437{,}82$$

L'emprunteur va donc rembourser en tout : $24\times 4\frac{0\times 1{,}004^{24}}{1{,}004^{24}-1}\approx 10\,507{,}65$ €.
La différence avec la somme empruntée, soit 507,65 € correspond au *cout de l'emprunt*.
Analysons maintenant comment se répartissent, au cours des remboursements, le capital (10000 €) et les intérêts (507,65 €) : c'est à dire établissons le *tableau d'amortissement*.
À la fin du premier mois, les 10 000 € prêtés auraient dû rapporter 10000x0,004 = 40 € d'intérêts.
J'estime donc que, dans son premier remboursement, mon débiteur me remboursera 40 € d'intérêts et que le complément (437,82 - 40 - 397,82 €) représentera un remboursement de capital. Le capital restant dû sera donc de 10000 € - 397,82 € = 9602,18 €. Cela signifie que tout se passera ensuite comme si je lui prêtais 9602,18 € sur 23 mois au taux mensuel de 0,4%.
Ces 9602,18 € travaillant sur le deuxième mois, ils enfanteraient 9602,18 €x0,004 ≈ 38,41 € d'intérêts.
Dans la deuxième mensualité, nous distinguerons donc 38,41 € d'intérêts et 438,82 € - 38,41 € = 399,41 € de remboursement de capital. Le capital restant dû sera donc alors de 9602,18 € - 399,41 € = 9202,77 € et sera à rembourser sur 22 mois.
La nécessité d'un tel calcul de répartition est dictée par la possibilité pour l'emprunteur d'arrêter l'emprunt à tout moment au cas où il retrouve de la liquidité. Par exemple, s'il décide de me finaliser l'emprunt aussitôt le deuxième remboursement, il devra me verser 9202,77 €.
Nous pouvons d'ailleurs vérifier que dans ce cas je n'y laisse pas des plumes : si je récupère cette somme et que je la place sur les 22 mois restants, ajoutée au premier remboursement placé sur 23 mois et au deuxième placé sur 22 mois, j'obtiens bien ma valeur acquise espérée : $9202{,}77\text{x}1{,}004^{22} + 437{,}82\text{x}1{,}004^{23} + 437{,}82\text{x}1{,}004^{22} \approx 11005{,}48$ €.
Nous pouvons schématiser l'algorithme de calcul du tableau d'amortissement de la façon suivante :

N° déchéance	Capital restant avant	Part d'intérêt	Part de capital	Capital restant après
n	*X*	*Y* = 0,004x*X*	*Z* = *m* - *Y*	*X'* = *X* - *Z*
n+1	*X'*			

Partant du fait que lorsque *n* = 1 le capital restant dû avant est égal à la somme empruntée, le tableau se calcule de proche en proche sur les 24 mois de la durée de l'emprunt.
Par ailleurs, le capital restant dû après le dernier versement doit évidemment être nul !
Une petite remarque cependant : pour que les erreurs d'arrondi ne se reportent pas de proche en proche, créant des différences non négligeables, les calculs doivent être faits avec une valeur plus précise de m que sa valeur approchée (437,82), les résultats étant **seulement ensuite** arrondis à deux décimales.
Le tableau suivant a été réalisé avec une valeur de *m* à 5 décimales.
Il est réconfortant d'y constater que la somme des intérêts remboursés est bien de 507,65 € (le cout de l'emprunt) et que la somme des parts de capital est bien de 10 000 € (la valeur actuelle de la somme empruntée).

Mensualité	437,81876			
N° échéance	Capital restant dû avant	Part d'intérêt	Part de capital	Capital restant après
1	10000	40,00	397,82	9602,18
2	9602,18	38,41	399,41	9202,77
3	9202,77	36,81	401,01	8801,76
4	8801,76	35,21	402,61	8399,15
5	8399,15	33,60	404,22	7994,93
6	7994,93	31,98	405,84	7589,09
7	7589,09	30,06	407,46	7181,63
8	7181,63	28,73	409,09	6772,54
9	6772,54	27,09	410,73	6361,81
10	6331,81	25,45	412,37	5949,44
11	59,49,44	23,80	414,02	5535,41
12	5535,41	22,14	415,68	5119,74
13	5119,74	20,48	417,34	4702,40
14	4702,40	18,81	419,01	4283,39
15	4283,39	17,13	420,69	3862,70
16	3862,70	15,45	422,37	3440,33
17	3440,33	13,76	424,06	3016,28
18	3016,28	12,07	425,75	2590,52
19	2590,52	10,36	427,46	2163,07
20	2163,07	8,65	429,17	1733,90
21	1733,90	6,94	430,88	1303,02
22	1303,02	5,21	432,61	870,41
23	870,41	3,48	434,34	436,07
24	436,07	1,74	436,07	0
Totaux		**507,65**	**10000**	

Il est temps de mathématiser un peu en remplaçant tout bêtement (ben voyons !) les nombres par des lettres.

2.5 Ze big formule

Certaines images peuvent heurter la sensibilité des moins avertis ... mais maintenant vous l'êtes !
Notons :

- C le capital prêté ($C = 10\,000$ dans l'exemple),
- n le nombre de périodes de remboursement ($n = 24$ dans l'exemple),
- t le taux périodique du prêt, strictement positif (t = 0,004 dans l'exemple),
- m le montant d'un remboursement, supposé constant ($m \approx 437{,}82$ dans l'exemple).

Remarquons que $t > 0$ entraine que l'emprunteur rembourse plus que le capital, c'est à dire que mx$n > C$.
La valeur actuelle C placée sur n périodes au taux périodique t engendre une valeur acquise de Cx$(1+t)^n$. Les remboursements périodiques, ensuite placés au taux t sur les périodes restantes

$$m\times(1+t)^{n-1}+m\times(1+t)^{n-2}+m\times(1+t)^{n-3}+\cdots+m\times(1+t)^{1}+m$$

donneront au final un montant de :

Ce qui est une somme de n termes en progression géométrique de raison $(1+t)$ et vaut, via la formule idoine : $\frac{m\times(1+t)^n-1}{(1+t)-1}=\frac{m}{t}\times((1+t)^n-1)$

retour au sommaire

Comme cette somme doit correspondre à la valeur acquise, nous avons donc la relation :

$$\frac{m}{t}\times((1+t)^n-1)=C\times(1+t)^n$$

que nous écrirons plus volontiers, en multipliant par *t* et divisant par (1+*t*)*n* :

$$m\times(1-(1+t)^{-n})=t\times C$$

C'est déjà de la belle formule !

2.6 Pour trois achetés, le quatrième offert !

Une telle formule liant 4 paramètres permet, connaissant trois d'entre eux, de calculer le quatrième. Analysons tous les cas.

2.6.1. Calcul du capital

Là c'est simple ! On connait le montant des remboursements m , leur nombre n et le taux t :

$$C=\frac{m\times(1-(1+t)^{-n})}{t}$$

Par exemple, 36 remboursements de 86,45 € pour un prêt à 0,2 % correspondent à un capital prêté de :

$$C=\frac{86,46\times(1-(1,002)^{-36})}{0,002}\approx 3\,000\,€$$

2.6.2. Calcul du remboursement périodique

Cela reste gentil. On connait cette fois le capital prêté C , le taux t et le nombre de remboursement n

$$m=\frac{C\times t}{(1-(1+t)^{-n})}$$

Ainsi, 20 000 € prêtés sur 48 périodes au taux de 0,1 % engendrent des remboursements périodiques de :

$$m=\frac{20000\times 0,001}{1-1,001^{-48}}\approx 426,95\,€$$

2.6.3. Calcul du nombre de remboursements

Ça se corse ! Cette fois les données sont C, m et t... et l'inconnue est n.
La formule générale nous conduit rapidement à :

$$(1+t)^{-n}=1-\frac{C\times t}{m}$$

Remarquons au passage que les données doivent se soumettre à la contrainte $C\mathrm{x}t<m$ pour que le second membre soit positif, faute de quoi le problème n'a pas de solution.

$$-n\times\ln(1+t)=\ln(1-\frac{C\times t}{m})$$

Un petit coup de logarithme permet de faire redescendre n sur terre et donne :

Ce qui fournit la formule du calcul du nombre de périodes : $n=-\frac{\ln(1-\frac{C\times t}{m})}{\ln(1+t)}$

Par exemple, 5 000 € prêtés au taux de 0,3% avec des remboursements de 100,43 € nécessitent un nombre de périodes de : $n=-\frac{\ln(1-\frac{5000\times 0,003}{100,43})}{\ln(1,003)}\approx 54$

2.6.4. Calcul du taux

Là, ça risque de piquer un peu ! Les données sont C, m et n, et on cherche le taux t.

L'équation en t à résoudre est : $m\times(1-(1+t)^{-n})-t\times C=0$ et il s'avère qu'elle n'est pas résoluble.

Considérons sur $[0;\ +\infty[$, la fonction définie par $\phi(x)=m\times(1-(1+x)^{-n})-C\times x$

Le taux t cherché doit vérifier $\phi(t)=0$, tout en étant strictement positif.

L'étude de la fonction ϕ donne : $\phi'(x)=\frac{m\times n}{(1+x)^{n+1}}-C\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\sqrt[n+1]{\frac{mn}{C}}-1$

En remarquant par ailleurs que : $\lim\limits_{x\to\infty}\phi(x)=-\infty$ et $\phi(\frac{m}{C})=-m\times(1+\frac{m}{C})^{-n}<0$

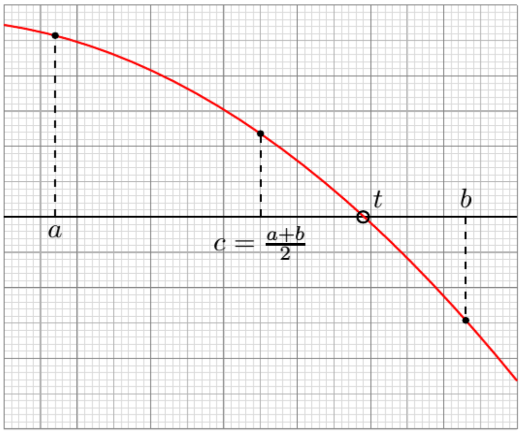
Le tableau de variation de ϕ (voir ci-après) permet de constater qu'elle ne s'annule que deux fois : en 0 (solution non acceptable), puis entre $\sqrt[n+1]{\frac{mn}{C}}-1$ et $\frac{m}{C}$, qui est la valeur de t. cherchée.

retour au sommaire

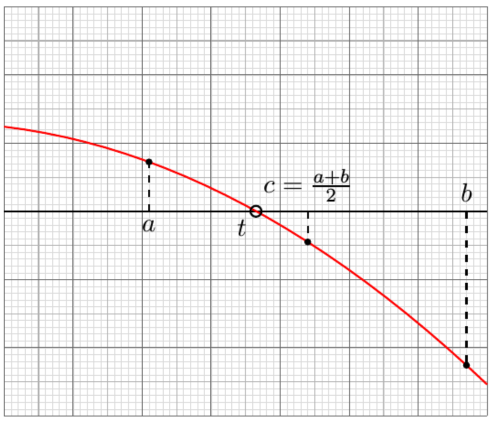
x	0		$\sqrt[n+1]{\frac{mn}{C}}-1$		t		$\frac{m}{C}$		$+\infty$
$\phi(x)$	0	$\nearrow$	>0	$\searrow$	0	$\searrow$	<0	$\searrow$	$-\infty$

La meilleure façon pour déterminer une valeur approchée de t avec une précision ϵ est de procéder par *dichotomie*[17] . Le principe est le suivant :

- la valeur cherchée est comprise entre $a=\sqrt[n+1]{\frac{mn}{C}}-1$ et $b=\frac{m}{C}$;



- on considère la moitié de l'intervalle $c=\frac{a+b}{2}$ et on calcule son image $\phi(c)$;
- on regarde le signe de cette image, tenant compte du fait que ϕ décroit dans cette zone ;
- si $\phi(c)>0$ c'est que $t\in[c\,;b]$ (moitié droite) et dans ce cas on recommence en remplaçant a par c ;
- si $\phi(c)<0$ c'est que $t\in[a\,;c]$ moitié gauche) et dans ce cas on recommence en remplaçant b par c ;



- à chaque étape la taille b - a de l'intervalle de recherche est divisée par 2 ;
- on recommence jusqu'à avoir la précision voulue, c'est à dire $b-a<\epsilon$;
- une fois ce but atteint, on prendra comme valeur de t le milieu $\frac{a+b}{2}$.

Je sens qu'un exemple s'impose !

[17] Non, ce n'est pas un gros mot !

Imaginons que nous prêtons C = 10 000 € sur n = 24 périodes avec des remboursements périodiques de m = 450 € et que nous voulions calculer le taux de l'emprunt avec une précision de 4 décimales[18], c'est à dire $\epsilon=0,0001$.

Le processus est donc initialisé avec $a=\frac{\left(\frac{24\times 450}{10000}\right)^1}{24}-1\approx 0,003212$ et $b=\frac{450}{10000}=0,045$, puis répercuté de proche en proche pour obtenir les résultats suivants :

Numéro d'étape	a	b	taille b - a	milieu $c=(a+b)/2$	image $\Phi(c)$	signe	c va remplacer
1	0.003212	0.045000	0.041788	0.024106	-45.119044	négatif	b
2	0.003212	0.024106	0.020894	0.013659	-11.533143	négatif	b
3	0.003212	0.013659	0.010447	0.008436	-2.193765	négatif	b
4	0.003212	0.008436	0.005224	0.005824	0.302263	positif	a
5	0.005824	0.008436	0.002612	0.007130	-0.754158	négatif	b
6	0.005824	0.007130	0.001306	0.006477	-0.177701	négatif	b
7	0.005824	0.006477	0.000653	0.006150	0.075034	positif	a
8	0.006150	0.006477	0.000326	0.006313	- 0.047980	négatif	b
9	0.006150	0.006313	0.000163	0.006232	0.014292	positif	a
10	0.006232	0.006313	0.000082	0.006273	terminé		

Nous arrêtons là car la taille de l'intervalle de recherche est devenue inférieure à $\epsilon=0,0001$
Nous prendrons pour t la valeur arrondie à 4 décimales du dernier milieu : $t \approx 0,0063$.
Le taux de cet emprunt est donc d'environ 6,3 %.

2.7 Et l'amortissement dans tout ça ?

Nous avons vu précédemment le calcul au travers d'un exemple. La généralisation ne fait qu'appliquer le même processus avec des expressions littérales et moult indices. Au final, le calcul se programme fort bien dans un tableur.
Adoptons, en plus des précédentes, les notations suivantes :

- k le numéro du remboursement (il varie de 1 à n)
- C_k le capital restant dû avant le remboursement n° k
- mi_k la part d'intérêt du remboursement n° k
- mc_k la part de capital du remboursement n° k

Le calcul de proche en proche, pour k variant de 1 à n, se fait via les relations suivantes :

$$\begin{cases} C_1 & = & C \\ mi_k & = & C_k \times t \\ mc_k & = & m - mi_k \\ C_{k+1} & = & C_k - mc_k \end{cases}$$

Les amateurs de calculs mathématiques peuvent montrer les formules suivantes, qui permettent d'obtenir directement les valeurs des protagonistes, sans passer par le calcul itératif :

$$\begin{cases} C_k & = & \frac{m}{t}+\left(C-\frac{m}{t}\right)\times(1+t)^{k-1} \\ mi_k & = & m+(C\times t-m)\times(1+t)^{k-1} \\ mc_k & = & (m-C\times t)\times(1+t)^{k-1} \end{cases}$$

Ils pourront même se réconforter en vérifiant que $\sum_{k=1}^{k=n} m\,i_k = m\times n - C$, ce qui correspond au cout de l'emprunt.
Voilà, je pense qu'on a fait le tour de la question !

[18] Les calculs seront menés à 6 décimales afin d'éviter les reports d'arrondis

retour au sommaire