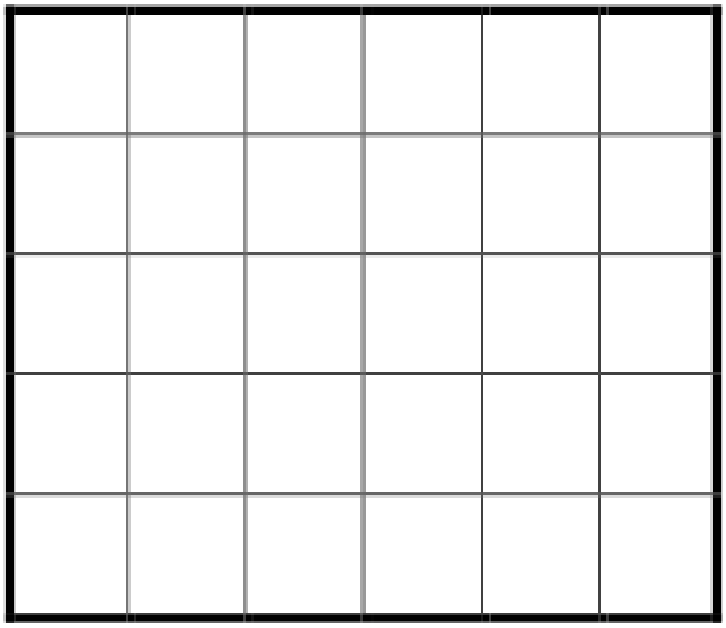

LE PROBLÈME DU TRIMESTRE (n°129)

Proposition de problème

(par Jacques Choné)

On considère, pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, la matrice carrée d'ordre n, $S(n)$, formée "en serpent" par les nombres $1, 2, \ldots, n^2$. Par exemple, $S(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $S(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang, le déterminant et la trace de $S(n)$.

2. On prend n termes de $S(n)$ de telle façon qu'un terme soit choisi dans chaque ligne et dans chaque colonne. Quel est l'ensemble des valeurs des sommes que l'on peut obtenir en ajoutant ces n termes ?
Comparer le résultat avec celui correspondant à la même démarche effectuée sur la matrice carrée d'ordre n, $M(n)$ formée par les nombres $1, 2, \ldots, n^2$ où les termes de chaque ligne sont rangés par ordre croissant, par exemple : $M(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $M(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Un grand merci à André Stef, qui a tenu depuis 2014 cette rubrique « Problèmes ». C'est désormais Philippe Févotte qui en a la charge ; c'est à lui que vous devez envoyer vos propositions de solutions, ainsi que toute proposition ou suggestion de nouveau problème.

Retour au sommaire

On aimerait obtenir toutes les combinaisons qui permettent d'atteindre 2016. Nous en avons déjà cité deux tout au début de cet article. L'informatique va nous y aider...

Alain Humbert, professeur de mathématiques et d'ISN au lycée Poncelet de Saint-Avold, a conçu un petit programme qui lui a permis d'obtenir **2880 combinaisons différentes pour 2016**. Il a d'abord remarqué, comme nous l'avons montré ci-dessus (remarque 2) que seules les combinaisons de type XXX+XXX+XXX+X pouvaient convenir.
En prenant les blocs de type ABC+DEF+GHI+J, il constate que l'on peut permuter les chiffres des unités (soit 4! possibilités), les chiffres des dizaines (3! possibilités) ou encore les chiffres des centaines (3! possibilités). Mais on aura alors compté les permutations de ABC DEF GHI entre eux trois : 3! possibilités, qui ne sont pas de nouvelles solutions. Finalement, la réponse en donne 4!x3!x3!/3! C'est-à-dire 144 possibilités. Au final, il n'y a vraiment que 20 possibilités multipliées par les 144 permutations donc 2880 solutions.
Il a écrit le code sous Python : il trouve en 1 minute 15 sur son vieux PC de 2008.
La liste des possibilités tient sur **46 pages A4** (à raison d'une ligne par solution, en Times new roman 10) !
Nous le remercions pour son travail.

Nous remercions également Serge Ermisse, qui a utilisé un programme sous Python. Au bout de 20 minutes, après 10 millions de tirages, le programme lui a fourni les 2880 solutions pour 2016. Quant à obtenir 2017, ne voyant rien venir après un certain temps, il a abandonné...

SOLUTION DU PROBLÈME DU TRIMESTRE (n°128)

Sur l'algorithme d'Euclide « étendu »

Rappel de l'énoncé

L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le PGCD de deux entiers (ou plus généralement de deux éléments d'un anneau … euclidien, par exemple celui des polynômes à coefficients dans un corps commutatif. Restons en à l'ensemble des entiers pour ce problème),

***Algorithme d'Euclide** pour le calcul du pgcd de deux entiers a et b, avec b non nul (prouver qu'il s'arrête bien n'est pas l'objet de ce problème).*
On écrit successivement les divisions euclidiennes (les termes r_k en fin d'égalité désignent les restes et les termes q_k les quotients) :

$a=q_1 b+r_1$

$b=q_2 r_1+r_2$

$r_1=q_3 r_2+r_3$

...

$r_{k-2}=q_k r_{k-1}+r_k$

...

$r_{n-1}=q_{n+1} r_n+0$ *, où r_n désigne le dernier reste non nul. On a alors $pgcd(a,b)=r_n$.*

Lorsqu'on « étend » l'algorithme d'Euclide pour le calcul de deux entiers a et b, on peut alors de déterminer deux entiers u et v tels que $au+bv=pgcd(a,b)$. (L'identité de Bézout exprime l'existence d'un tel couple))

Retour au sommaire

***On peut « remonter » l'algorithme**. On écrit ainsi*

$pgcd(a\,,\,b)=r_n=r_{n-2}-q_n r_{n-1}$

$pgcd(a\,,\,b)=r_{n-2}-q_n(r_{n-3}-q_{n-1}r_{n-2})=r_{n-2}(1+q_n q_{n-1})+r_{n-3}(-q_n)$

...

$pgcd(a\,,\,b)=u_n a+v_n b$

***On peut « descendre » l'algorithme.** On écrit*

$r_1=a-b*q_1$

$r_2=b-q_2 r_1=b-q_2(a-q\ 1*b)=a*(-q_2)+b(1+q_1*q_2)$

...

$r_k=r_{k-2}-q_k r_{k-1}=a*\alpha_{k-2}+b*\beta_{k-2}-q_k(a*\alpha_{k-1}+b*\beta_{k-1})=a*(\alpha_{k-2}-q_k\alpha_{k-1})+b*(\beta_{k-2}-q_k\beta_{k-1})$

...

$r_n=r_{k-2}-q_n r_{n-1}=a*\alpha_{n-2}+b*\beta_{n-2}-q_n(a*\alpha_{n-1}+b*\beta_{n-1})=a*(\alpha_{n-2}-q_k\alpha_{n-1})+b*(\beta_{n-2}-q_k\beta_{n-1})$

$r_n=a*\alpha_n+b*\beta_n=pgcd(a\,,\,b)$

Ces deux algorithmes fournissent alors deux couples $(u_n,\,v_n)$ *et* (α_n,β_n) *satisfaisant l'identité de Bézout.*

***Question :** Ces deux couples sont-ils égaux ?*

Solution proposée par Jacques Choné.

La réponse est OUI.

En utilisant les notations de l'énoncé et en posant, de plus, $r_{-1}=a\,,\ \ r_0=b$, écrivons matriciellement les égalité considérées.

Par exemple $r_{k-2}=q_k r_{k-1}+r_k$ se traduit par $\begin{pmatrix} r_{k-1} \\ r_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r_{k-2} \\ r_{k-1} \end{pmatrix}$.

1. En « remontant » l'algorithme :

$$\begin{pmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r_{n-2} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r_{n-3} \\ r_{n-2} \end{pmatrix}=.....=\left(\prod_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-k} \end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\ .$$

On notera que la multiplication des matrices n'étant pas commutative le produit indiqué doit respecter l'ordre des indices.

2. En « descendant » l'algorithme :

Montrons, à l'aide d'une récurrence finie, qu'on a alors pour tout $m\in\{1,..,n\}$:

$$\begin{pmatrix} r_{m-1} \\ r_m \end{pmatrix}=\left(\prod_{k=0}^{m-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{m-k} \end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\ .$$

Comme $r_1=a-bq_1$ *et* $r_0=b$, la proposition est vraie pour $m=1$.

Soit $m\in\{1,..,n-1\}$; Supposons, (HR), que la proposition soit vraie pour *m.*

Puisque $r_{m+1}=r_{m-1}-r_m q_{m+1}$, on a (d'après (HR) pour la seconde égalité) :

Retour au sommaire

$$\begin{pmatrix} r_m \\ r_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{m+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{m-1} \\ r_m \end{pmatrix} = \left(\prod_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{m+1-k} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$ ce qui termine la récurrence.

La proposition étant vraie pour *n*, cela signifie que r_n est déterminé comme combinaison linéaire de *a* et *b* en descendant l'algorithme par la même formule qu'en le remontant.
D'où le résultat.

Les coefficients de de *a* et *b* sont les termes de la seconde ligne de $M = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-k} \end{pmatrix} \right)$

c'est-à-dire les termes de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} M$.

***Autre solution**, ou plutôt autre rédaction, par André Stef.*
On précisera ici, en lien avec les algorithmes vus en lycée ou en premières années post BAC, les constructions des couples (u_n, v_n) *(qu'on renommera et réordonnera) et* (α_n, β_n) .

On pose, comme pour la solution de Jacques Choné, $r_{-1} = a$, $r_0 = b$ *et* $r_{n+1} = 0$ *(« premier » reste nul)*

***Remontée de l'algorithme** (vue au lycée ou en post BAC, notamment pour les polynomes). On pose* $x_{n+1} = 0, x_n = 1$ *. On a ainsi* $pgcd(a, b) = x_n r_n + x_{n+1} r_{n-1}$

On a alors, par une récurrence descendante finie (oui : descendante et finie), $pgcd(a, b) = x_k r_k + x_{k+1} r_{k-1}$ *pour tout entier* $k \in [\![0, n]\!]$ *, où on aura posé pour tout* $k \in [\![0, n-1]\!]$ $x_k = -q_{k+1} x_{k+1} + x_{k+2}$.

NB : on vérifie l'hérédité par l' écriture , pour $1 \leqslant k \leqslant n$ *:*
$pgcd(a, b) = x_k r_k + x_{k+1} r_{k-1} = x_k (r_{k-2} - q_k r_{k-1}) + x_{k+1} r_{k-1} = (-q_k x_k + x_{k+1}) r_{k-1} + x_k r_{k-2} = x_{k-1} r_{k-1} + x_k r_{k-2}$

Ainsi, pour $k = 0$ *, on a* $pgcd(a, b) = x_k r_k + x_{k+1} r_{k-1} = x_0 b + x_1$ *.On obtient ainsi que le couple* (x_1, x_0) *satisfait l'identité de Bézout (il s'agit du couple* (u_n, v_n) *présenté en énoncé).*

Mise en forme matricielle : On pose $M_k = \begin{pmatrix} -q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ce qui permet d'écrire* $\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$ *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$ *, et ainsi* $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = M_1 M_2 \ldots M_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

***Descente de de l'algorithme** (on la rencontre dans les livres de TS, en lien avec une feuille de calcul sur tableur)**.** On pose* $\alpha_{-1} = 1, \beta_{-1} = 0, \alpha_0 = 0, \beta_0 = 1$ *. On a ainsi* $r_{-1} = \alpha_{-1} a + \beta_{-1} b$ *et* $r_0 = \alpha_0 a + \beta_0 b$.

On démontre alors par récurrence double finie (oui : double et finie) qu'on a alors $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$ *pour tout entier* $k \in [\![-1, n]\!]$ *, où on aura posé pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$ $\alpha_k = \alpha_{k-2} - q_k \alpha_{k-1}$ *et* $\beta_k = \beta_{k-2} - q_k \beta_{k-1}$

(on le vérifie par l' écriture : $r_k = r_{k-2} - q_k r_{k-1} = \alpha_{k-2} a + \beta_{k-2} b - q_k (\alpha_{k-1} a + \beta_{k-1} b)$ *)*

Retour au sommaire

Ainsi, pour $k=n$ *, on a* $pgcd(a\,,b)=r_n=\alpha_n a+\beta_n b$ *.On obtient ainsi que le couple* (α_n,β_n) *satisfait l'identité de Bézout.*

Mise en forme matricielle : Avec la même notation $M_k=\begin{pmatrix}-q_k & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *, on a* $\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \alpha_{k-1}\end{pmatrix}=M_k\begin{pmatrix}\alpha_{k-1}\\ \alpha_{k-2}\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\beta_k\\ \beta_{k-1}\end{pmatrix}=M_k\begin{pmatrix}\beta_{k-1}\\ \beta_{k-2}\end{pmatrix}$ *, pour tout* $k\in[\![1\,,n]\!]$ *, et ainsi* $\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}=M_n M_{n-1}\dots M_1\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\beta_n\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}=M_n M_{n-1}\dots M_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ *.*

Symétrie :
Posant $A=M_1 M_2\dots M_n$ *et* $B=M_n M_{n-1}\dots M_1$ *, on remarque que les matrices* M_k *sont toutes symétriques, et donc* A *et* B *sont symétriques, et on a également :* ${}^tA={}^tM_n\,{}^tM_{n-1}\dots{}^tM_1=M_n M_{n-1}\dots M_1=B$ *, donc* $A=B$ *.*
On déduit de $\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\beta_n\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ *que* $x_0=\beta_n$ *.*
L'argument (à nouveau) de la symétrie de A (matrice 2x2) permet de déduire de $\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ *que* $x_1=\alpha_n$ *.*
Ainsi $(x_1,x_0)=(\alpha_n,\beta_n)$.

Les deux algorithmes fournissent donc le même couple de coefficients pour l'identité de Bézout.

Retour au sommaire