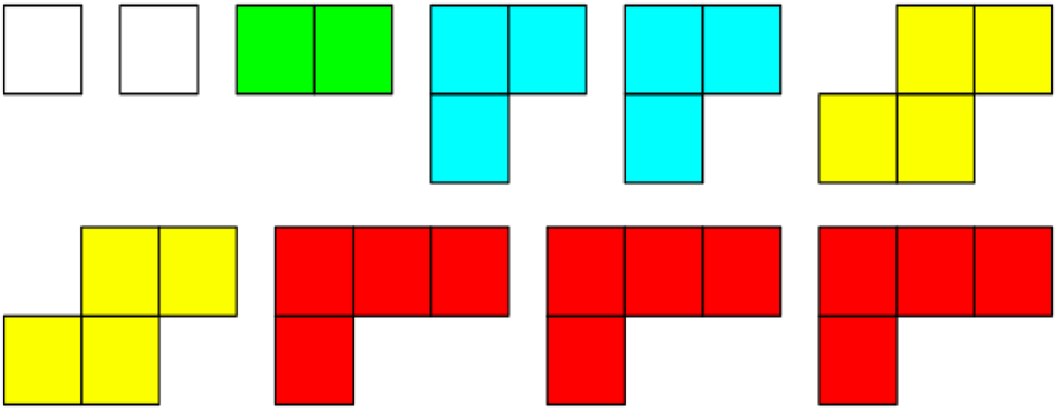
MATHS & MÉDIAS

DES DÉFIS POUR DE JEUNES ÉLÈVES

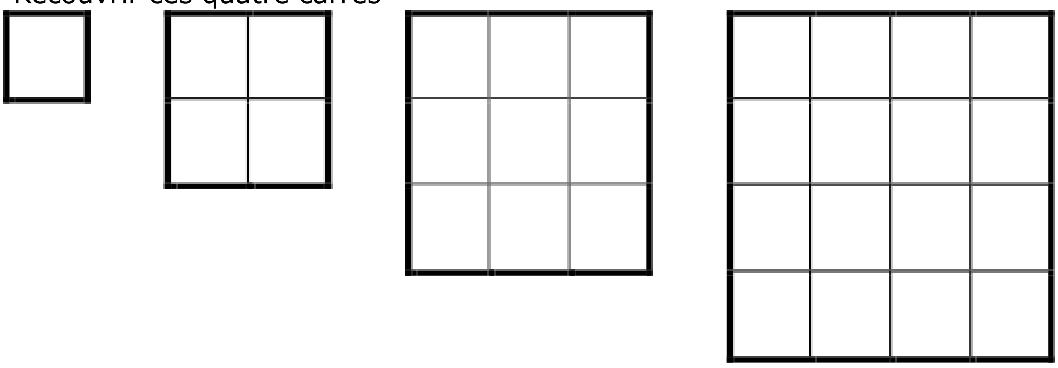
Les dix pièces



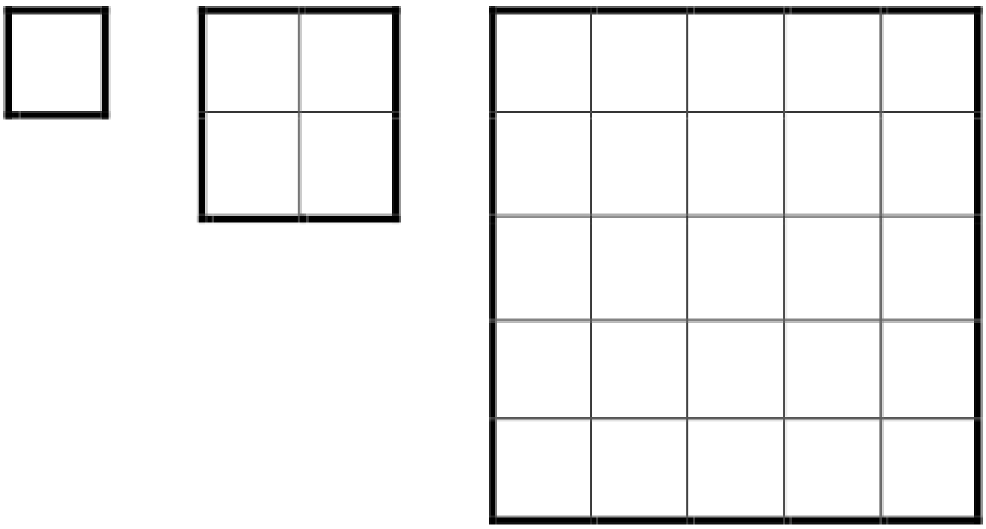
Les pièces sont retournables et de même couleur sur les deux faces. Elles peuvent être réalisées en carton, en « carton mousse », etc. Des carrés de base de 3 cm de côté facilitent leur manipulation par des petites mains.

Trois défis avec les dix pièces

1 – Recouvrir ces quatre carrés

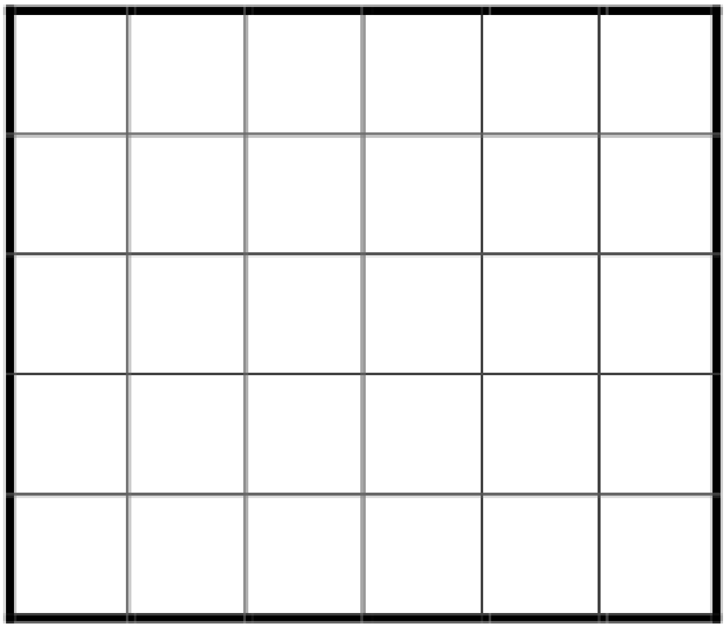


2 – Recouvrir ces trois carrés



3 - Recouvrir ce rectangle de telle sorte que deux pièces de même couleur ne se touchent ni par un sommet, ni par un côté.

Retour au sommaire



LE PROBLÈME DU TRIMESTRE (n°129)

Proposition de problème

(par Jacques Choné)

On considère, pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, la matrice carrée d'ordre n, $S(n)$, formée "en serpent" par les nombres $1,2,\ldots,n^2$. Par exemple, $S(2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$ et $S(3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\6 & 5 & 4\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang, le déterminant et la trace de $S(n)$.

2. On prend n termes de $S(n)$ de telle façon qu'un terme soit choisi dans chaque ligne et dans chaque colonne. Quel est l'ensemble des valeurs des sommes que l'on peut obtenir en ajoutant ces n termes ?
Comparer le résultat avec celui correspondant à la même démarche effectuée sur la matrice carrée d'ordre n, $M(n)$ formée par les nombres $1,2,\ldots,n^2$ où les termes de chaque ligne sont rangés par ordre croissant, par exemple : $M(2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ et $M(3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

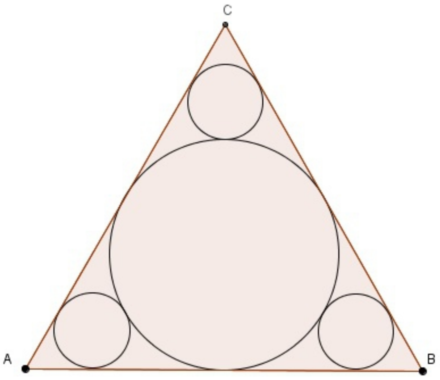
Un grand merci à André Stef, qui a tenu depuis 2014 cette rubrique « Problèmes ». C'est désormais Philippe Févotte qui en a la charge ; c'est à lui que vous devez envoyer vos propositions de solutions, ainsi que toute proposition ou suggestion de nouveau problème.

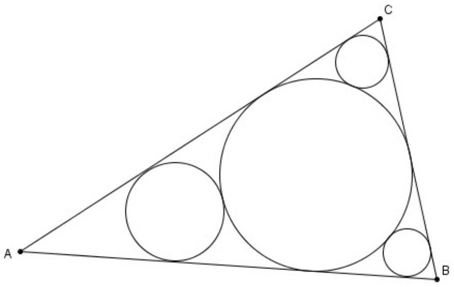
Retour au sommaire

UN PREMIER DÉFI POUR VOS ÉLÈVES (n° 129-a)

Défi proposé par Laurent

Un triangle équilatéral étant donné, construire cette figure : un cercle tangent aux trois côtés, et trois cercles « dans les coins », tangents au premier cercle et à deux des côtés.
Il faudra donner un programme de construction.





Prolongement : tracer quatre cercles tangents dans un triangle <u>quelconque</u>, dans une disposition analogue à la figure ci-contre. Donner également un programme de construction.

UN SECOND DÉFI POUR VOS ÉLÈVES (n° 129-b)

Girard, Stevin, Cédric et Pol

Le commissaire Girard, qui est maintenant à la retraite (il a été remplacé par le commissaire Stevin) discute mathématiques avec son petit-fils Pol.

« Je vais te montrer quelque chose d'intéressant : tu prends un nombre entier. S'il est pair, tu le divises par 2 ; s'il est impair, tu le multiplies par 3 et tu ajoutes 1. Et tu continues ainsi avec le résultat jusqu'à obtenir 1. Par exemple, si je pars de 3, j'obtiens successivement 10, 5, 16, 4, 2, 1 en 7 coups.
- Mais si je n'obtiens pas de 1, ça ne s'arrêtera jamais ?
- On n'a jamais trouvé d'exemple où ça ne s'arrête pas.
- Alors c'est démontré ?
- Non ! Ce n'est pas parce qu'on n'a jamais trouvé un tel exemple que c'est démontré. Mais si tu arrives un jour à la démontrer, tu auras peut-être la médaille Fields comme ton oncle Cédric ».
Ils essayent ensemble encore quelques exemples :
En partant de 2 : 2 → 1. C'est fini en un coup !
En partant de 5 : 5 → 16 → 8 → 4 → 3 → 2 → 1. Il a fallu 5 coups.
En partant de 19 :
19 → 58 → 29 → 88 → 44 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 10 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1.

Retour au sommaire

« Oh ! Il a fallu 21 coups ! Et on est « monté jusqu'à 88, c'est énorme ! ».

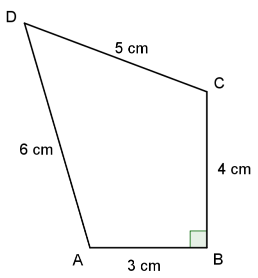
Papy Girard dit à son petit fils : « J'ai même écrit un algorithme pour faire des essais, et je l'ai ensuite programmé sur mon ordinateur. Le voici ».

```
Variable n (entier non nul) : c'est le nombre de départ.
Début de l'algorithme
        Lire n
        Tant que n≠1 faire ceci :
                si n est pair alors remplacer n par n/2 sinon le remplacer par 3n+1
        (fin de l'instruction "faire")
        Afficher n
Fin de l'algorithme
```

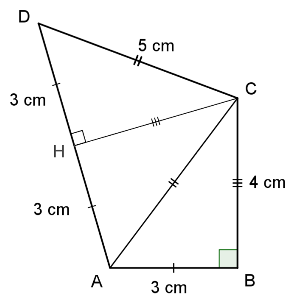
Après quelques essais, Pol réplique : « Il fonctionne bien, ton programme, mais il use beaucoup de papier ; il affiche tous les nombres trouvés, mais pas le nombre de coups ni la valeur maximale rencontrée en cours de route. Moi je voudrais quelque chose qui n'affiche pas la liste des nombres, mais simplement le nombre de coups et la valeur maximale. Par exemple, en partant de 19, ça m'afficherait : 21 coups, maximum 88 ».
Papy lui répond : « Tu es assez grand, tu as dû apprendre à écrire un algorithme. Alors tu peux le faire toi-même ! ».

Et vous, sauriez-vous comment modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche ce que désire Pol ?

SOLUTION DU DÉFI 128-a



Quelle est l'aire du quadrilatère ABCD ?
Solution : La mesure de l'hypoténuse [AC] du triangle rectangle ABC est 5 cm (théorème de Pythagore). Le triangle ACD est don isocèle en C. Soit(CH) est la médiatrice de [AD].
Les triangles ABC, AHC et DHC sont superposables et ont la même aire donc l'aire du quadrilatère ABCD est 3 x 6 cm² = **18 cm²**



SOLUTION DU DÉFI 128-b

Rappel du défi : Avec les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, chacun n'étant utilisé qu'une seule fois, on forme des nombres de un, deux ou trois chiffres. Par exemple : 136, 40, 8, 95, 27. On calcule la somme de ces nombres ; avec l'exemple précédent, on obtient ce total : 136+40+8+95+27=306.

Le défi était le suivant : obtenir, si c'est possible, **un total égal à 2017**, ou s'en approcher le plus près possible.

Retour au sommaire

Il semble que ce soit impossible d'obtenir 2017 ; nous allons d'ailleurs le démontrer ci-dessous. Par contre, on peut obtenir 2016, et de beaucoup de façons : par exemple 485+621+903+7 ou 673+852+490+1.... (voir en fin de cet article).

♦ Première remarque préliminaire : le plus petit nombre que l'on puisse obtenir est 0+1+2+...+9 = 45. Le plus grand est 963+852+741+0 = 2556 (ou son "jumeau" 963+852+740+1), que l'on obtient en prenant tout d'abord les plus grandes centaines (9, 8 et 7), ensuite les plus grandes dizaines (6, 5 et 4) et enfin le reste.

♦ Seconde remarque : plus il y a de « morceaux » pour décomposer le nombre, moins ce nombre sera élevé. Or on veut obtenir (ou approcher) 2017. Avec une décomposition en quatre « morceaux » (du type XXX+XXX+XX+XX), on ne peut pas dépasser 1926 (973+862+51+40 ou 973+862+50+41). Pour obtenir 2017, les seules combinaisons possibles seront donc de la forme XXX+XXX+XXX+X.

♦ Troisième remarque : si une somme est du type XXX+XXX+XX<u>0</u>+<u>1</u>, on ne la modifie pas en la remplaçant par XXX+XXX+XX<u>1</u>+<u>0</u>.

♦ Quatrième remarque : quand on a trouvé une solution, on constate que c'est toujours un multiple de 9.

Nous allons démontrer les deux propriétés suivantes :
- si le nombre qu'on veut obtenir n'est pas multiple de 9, c'est impossible (propriété 1) ;
- on peut atteindre tous les multiples de 9, de 45 à 2556 inclus (propriété 2).

Propriété

Montrons que pour toute écriture utilisant une seule fois chacun des chiffres de 0 à 9, l'addition de nombres à un chiffre ou deux chiffres ou trois chiffres donne nécessairement un multiple de 9.
Pour envisager toutes les écritures on va convenir que tout nombre de trois chiffres va s'écrire *CDU* quitte à ajouter à l'écriture d'un nombre à deux chiffres un zéro à gauche des dizaines, voire même deux zéros pour un nombre à un chiffre.

Donc avec la convention précédente toute somme peut s'écrire : $\sum_{i=1}^{i=10} CiDiUi$

(Rappel : avec les zéros qui n'ajoutent rien il faut se souvenir que 0+1+2+3...+9=45)

$\sum_{i=1}^{i=10} CiDiUi = \sum_{i=1}^{i=10} 100\,Ci+10\,Di+Ui = \sum_{i=1}^{i=10} 99\,Ci+Ci+9\,Di+Di+Ui = 9\sum_{i=1}^{i=10} 11\,Ci+Di + 45$,

puisque la somme des chiffres des centaines des dizaines et des unités fait 45.

Ainsi toute somme peut s'écrire :$9\{(\sum_{i=1}^{i=10} 11\,Ci+Di)+5\}$. Le résultat est bien un multiple de 9.

Propriété

Peut-on obtenir <u>tous</u> les multiples de neuf à partir de 45 jusqu'à 2556 ?
Lorsqu'on échange une centaine avec une dizaine on obtient une différence de *CDU-DCU* = 90*(C-D)* ; pour un échange d'une centaine avec une unité, *CDU-UDC* =99 (*C-U*) ; pour un échange d'une dizaine avec une unité, *CDU-CUD* = 9(*D-U*). Cela est valable que ce soit pour des nombres à deux ou à trois chiffres.
En partant de 2556 (la plus grande valeur possible), avec les échanges évoqués ci-dessus, on peut soustraire à un nombre donné 9, 18,...81 avec 9(*D-U*), soustraire 90 avec 90(*C-D*) ou soustraire 99 avec 99(*C-U*).
On peut donc ainsi obtenir tous les multiples de 9 de 2556 à 45. La seconde propriété est démontrée.

Finalement, on a démontré qu'on ne pouvait pas atteindre 2017, et on subodore qu'il y a beaucoup de façons d'obtenir le nombre le plus proche qui est 2016.

Retour au sommaire

On aimerait obtenir toutes les combinaisons qui permettent d'atteindre 2016. Nous en avons déjà cité deux tout au début de cet article. L'informatique va nous y aider...

Alain Humbert, professeur de mathématiques et d'ISN au lycée Poncelet de Saint-Avold, a conçu un petit programme qui lui a permis d'obtenir **2880 combinaisons différentes pour 2016**. Il a d'abord remarqué, comme nous l'avons montré ci-dessus (remarque 2) que seules les combinaisons de type XXX+XXX+XXX+X pouvaient convenir.
En prenant les blocs de type ABC+DEF+GHI+J, il constate que l'on peut permuter les chiffres des unités (soit 4! possibilités), les chiffres des dizaines (3! possibilités) ou encore les chiffres des centaines (3! possibilités). Mais on aura alors compté les permutations de ABC DEF GHI entre eux trois : 3! possibilités, qui ne sont pas de nouvelles solutions. Finalement, la réponse en donne 4!x3!x3!/3! C'est-à-dire 144 possibilités. Au final, il n'y a vraiment que 20 possibilités multipliées par les 144 permutations donc 2880 solutions.
Il a écrit le code sous Python : il trouve en 1 minute 15 sur son vieux PC de 2008.
La liste des possibilités tient sur **46 pages A4** (à raison d'une ligne par solution, en Times new roman 10) !
Nous le remercions pour son travail.

Nous remercions également Serge Ermisse, qui a utilisé un programme sous Python. Au bout de 20 minutes, après 10 millions de tirages, le programme lui a fourni les 2880 solutions pour 2016. Quant à obtenir 2017, ne voyant rien venir après un certain temps, il a abandonné...

SOLUTION DU PROBLÈME DU TRIMESTRE (n°128)

Sur l'algorithme d'Euclide « étendu »

Rappel de l'énoncé

L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le PGCD de deux entiers (ou plus généralement de deux éléments d'un anneau … euclidien, par exemple celui des polynômes à coefficients dans un corps commutatif. Restons en à l'ensemble des entiers pour ce problème),

***Algorithme d'Euclide** pour le calcul du pgcd de deux entiers a et b, avec b non nul (prouver qu'il s'arrête bien n'est pas l'objet de ce problème).*
On écrit successivement les divisions euclidiennes (les termes r_k en fin d'égalité désignent les restes et les termes q_k les quotients) :

$a=q_1 b+r_1$
$b=q_2 r_1+r_2$
$r_1=q_3 r_2+r_3$
...
$r_{k-2}=q_k r_{k-1}+r_k$
...
$r_{n-1}=q_{n+1} r_n+0$ *, où* r_n *désigne le dernier reste non nul. On a alors* $pgcd(a,b)=r_n$.

Lorsqu'on « étend » l'algorithme d'Euclide pour le calcul de deux entiers a *et* b *, on peut alors de déterminer deux entiers* u *et* v *tels que* $au+bv=pgcd(a,b)$.
(L'identité de Bézout exprime l'existence d'un tel couple))

Retour au sommaire