ÉTUDES MATHÉMATIQUES

GRANDEURS, PROPORTIONS, FRACTIONS ET NOMBRES…

D'après une conférence donnée par Jean Dhombres
à Liège le 9 octobre 1996

LES GRANDEURS CHEZ EUCLIDE

On ne trouve aucune définition du terme « grandeur » chez Euclide. Il y a des grandeurs « de même genre » : les longueurs, les surfaces, etc. Les entiers ne sont pas considérés comme des grandeurs.

L'opération fondamentale sur les grandeurs est **l'addition**.
Cette addition est intimement liée à l'ordre : si A > B, il existe C tel que B + C = A.
Cela donne, pour chaque type de grandeur, une structure de groupe abélien totalement ordonné et archimédien.

Euclide utilise un isomorphisme entre ces divers groupes : c'est la théorie des proportions (*λόγος*), développée au livre V.
Conséquence : le seul objet qui résume tous les autres est le rapport de longueurs $\frac{L}{L'}$; on peut donc mesurer une grandeur *L* **par** une autre grandeur *L'*.

Mais…
Rien dans Euclide ne permet d'ajouter un *λόγος* à un autre (le *λόγος* n'est pas une grandeur).
On peut cependant les multiplier, comme une composition d'opérateurs :

$$\left[\frac{A}{B}\right]\times\left[\frac{B}{C}\right]=\left[\frac{A}{C}\right].$$

Remarque
Euclide ne définit pas le *λόγος*, mais il définit la proportion, ou égalité de raison ou analogie (*αναλογια*) $\left[\frac{A}{B}\right]=\left[\frac{C}{D}\right]$, « *A* est à *B* comme *C* est à *D* », d'une façon équivalant à ceci : il y a analogie si on ne peut 'rien' insérer entre les deux, c'est à dire s'il n'existe pas d'entiers *m* et *p* tels que $\left[\frac{A}{B}\right]<\frac{p}{m}<\left[\frac{C}{D}\right]$ (voir note [6]).

On peut faire des calculs sur les *λόγος* sans se préoccuper de la nature des grandeurs. Par exemple :
si $\left[\frac{A}{B}\right]=\left[\frac{C}{D}\right]$, alors $\left[\frac{A}{B}\right]=\left[\frac{C}{D}\right]=\left[\frac{A+C}{B+D}\right]$.

> Le problème qui va se poser jusqu'au XVII[e] siècle :
> Il y a deux théories entièrement distinctes,
> - la théorie des proportions (livre V d'Euclide),
> - la théorie des fractions d'entiers (livre VII).

6 En réalité, sa définition est la suivante : *A* et à *B* comme *C* et à *D* si, pour tous les entiers *n* et *p* possibles, les trois affirmations suivantes sont vraies simultanément :
1°) Si $nA > pB$ alors $nC > pD$,
et 2°) Si $nA = pB$ alors $nC = pD$,
et 3°) Si $nA < pB$ alors $nC < pD$.

Retour au sommaire

LES MATHÉMATICIENS ARABES

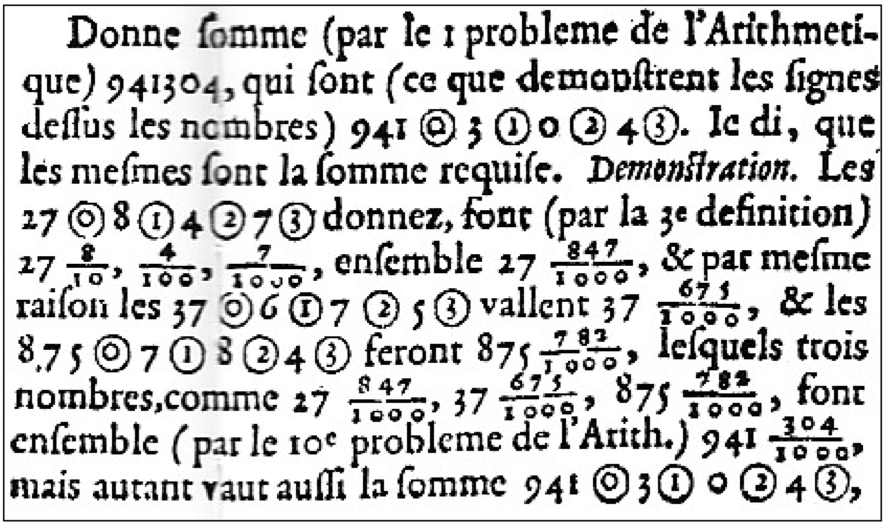
Les mathématiciens arabes (à partir du IXe siècle) ont travaillé à partir des éléments d'Euclide et de la théorie des proportions. Mais en ce qui concerne le domaine numérique, ils ont profité de l'apport de la numération indienne décimale de position (sans toutefois perdre la numération sexagésimale, notamment en astronomie).
Le premier à utiliser les fractions décimales est **Al Uqlidisi** (première moitié du Xe siècle), dans *Kitab al fusul fi l'hisab al hindi*[7].
A l'aide du principe que la moitié de 1 est un nombre, il peut remplacer 1/2 par 0'5. Par exemple, il divise 19 par 2 cinq fois successivement :

19 → 9'5 → 4'75 → 2'375 → 1'1875 → 0'59375.

Il est très à l'aise dans l'utilisation des puissances de 10, n'hésite pas à diviser ou à multiplier un nombre par 10 en le déplaçant d'un rang vers la droite ou vers la gauche. Il insiste sur la nécessité de marquer par un signe (une espèce d'apostrophe) la place de la séparation des unités et de la partie fractionnaire. Lorsqu'il veut exprimer en toutes lettres un résultat, il exprime la partie décimale sous forme d'une fraction décimale : par exemple, 12'35 se dira « *douze et trente cinq centièmes* » et il ajoute, pour correspondre au langage usuel, « *douze et un quart et un dixième* ».
Mais le changement ne s'est pas fait dans la vie courante : il aurait fallu abandonner une terminologie et des techniques héritées de traditions millénaires : l'une d'origine égyptienne, l'emploi des fractions unitaires (1/2, 1/3, 1/4...), l'autre d'origine babylonienne, l'emploi des fractions sexagésimales ; sans compter la répulsion que peut engendrer un système dans lequel les fractions les plus simples deviennent compliquées sinon inexprimables (par exemple le *danaq* (1/6) très fréquemment utilisé, qui devient un dixième et six dixièmes de dixième et six dixièmes d'ordre trois et six dixièmes d'ordre quatre etc.)[8].

Malheureusement, l'œuvre de Al Uqlidisi est restée inconnue ; il a fallu attendre **Nasir ad Din at Tūsi** (1201-1274, œuvre publiée à Rome en arabe en 1594 et en latin en 1657), puis **Al Kaši** (1380-1429) pour trouver une véritable pratique de l'arithmétique décimale (les mêmes algorithmes, de multiplication par exemple, étaient utilisés pour les entiers et pour les décimaux, avec simplement un décalage de la virgule).

La redécouverte des décimaux en Europe à la fin du XVIe siècle par Simon Stevin sera, elle, suivie de leur usage généralisé dans les livres d'abaques (tables de calcul). Ci-dessous un extrait de sa ***Disme*** :


Donne ſomme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui ſont (ce que demonſtrent les ſignes deſſus les nombres) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ie di, que les meſmes ſont la ſomme requiſe. *Demonſtration.* Les 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, font (par la 3e definition) 27 $\frac{8}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{7}{1000}$, enſemble 27 $\frac{847}{1000}$, & par meſme raiſon les 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ vallent 37 $\frac{675}{1000}$, & les 875 ⓪ 7 ① 8 ② 4 ③ feront 875 $\frac{782}{1000}$, leſquels trois nombres, comme 27 $\frac{847}{1000}$, 37 $\frac{675}{1000}$, 875 $\frac{782}{1000}$, font enſemble (par le 10e probleme de l'Arith.) 941 $\frac{304}{1000}$, mais autant vaut auſſi la ſomme 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③,

7 Écrite vers l'an 952, son œuvre n'a été découverte qu'en 1966.
8 D'après un article de Mahdi Abdeljaouad, paru dans le n°50 de ***Miftah al Hissab***, bulletin de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, juin 1978.

Retour au sommaire

عُمَر الخَيَّام

'Umar al Khayyam (1048-1123) a beaucoup travaillé sur la théorie des proportions d'Euclide. En ce qui concerne les rapports incommensurables, qui posaient problème chez les grecs, il adopte une démarche qui consiste à décomposer un rapport *A/B* en une fraction continue :

à partir d'une longueur x, il cherche le plus grand entier q contenu dans x, et pose $x_1 = \frac{1}{x-q}$ (c'est à dire que $x = q + \frac{1}{x_1}$), nécessairement supérieur à 1 ; puis le plus grand entier q_1 contenu dans x_1, et pose $x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1}$ (c'est à dire que $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$), et ainsi de suite.

Al Khayyam énonce qu'il y a égalité de deux rapports de grandeurs s'il y a égalité de leurs quotients partiels (q, q_1, q_2 ... q_n) pour toute valeur de n :

Il définit d'abord l'égalité de deux rapports :

"Étant [données] *quatre grandeurs [telles que] la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien* [telles que] *la première soit une partie de la seconde, et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien* [telles que] *la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est nécessairement comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique."*

En termes actuels, cela signifie que deux rapports sont égaux si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

i) A = B et C = D,
ii) A = B/*n* et C = D/*n*,
iii) A = *p*×B/*n* et C = *p*×D/*n*.

Il s'intéresse ensuite au cas où aucune des conditions précédentes n'est vérifiée (ce que nous appelons les cas d'incommensurabilité)[9] .

Si les grandeurs ne sont pas selon ces trois formes et que, lorsqu'on retranche de la seconde tous les multiples de la première [contenus dans la seconde] *jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la première, et si de la même manière, lorsqu'on retranche de la quatrième tous les multiples de la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la troisième, et que le nombre de multiples de la première contenu dans la seconde est égal au nombre de multiples de la troisième* [contenu] *dans la quatrième. Et si après* [cela*], on retranche* [de la première] *tous les multiples du résidu de la seconde par rapport à la première, de telle sorte qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la seconde, et que de la même* [manière], *on retranche* [de la troisième] *tous les multiples du résidu de la quatrième par rapport à la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la quatrième, et qu'alors le nombre de multiples du résidu de la seconde est égal au nombre de multiples du résidu de la quatrième ;* [...] *Et si, lorsque de la même manière, on retranche tous les multiples des résidus successivement les uns des autres, comme nous l'avons montré, le nombre des résidus de la première et de la seconde est égal au nombre correspondant de la troisième et de la quatrième,* [et ce] *indéfiniment, alors le rapport de la première à la seconde sera, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième. Et c'est cela le rapport véritable pour le type géométrique* [des grandeurs].

9 Extrait du chapitre ***De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels***, d'Éliane Cousquer, dans l'ouvrage ***La mémoire des nombres***, Actes du X$^{\text{eme}}$ colloque d'épistémologie et d'histoire des mathématiques à Cherbourg (27-29 mai 1994), édité par l'IREM de Basse-Normandie en 1997.

Retour au sommaire

Et il s'efforcera de prouver que sa théorie est équivalente à celle du livre V d'Euclide. Il soulève alors le problème profond entre la notion de rapport (*λόγος*) et celle de nombre, qui est pour lui de nature philosophique :
« *Un rapport peut-il être par essence un nombre, ou est-il seulement accompagné d'un nombre, ou encore le rapport est-il lié à un nombre non par nature mais à l'aide de quelque chose d'extérieur, ou bien le rapport est-il lié au nombre et n'a-t-il besoin, de ce fait, de rien d'extérieur ?* [10]»

LE XVIIe SIÈCLE EN OCCIDENT CHRÉTIEN

On voit apparaitre des « *grandeurs numériques* » (cette terminologie disparaissant rapidement au profit de « *quantités* » ; plus tard Newton les qualifiera de *nombres*).
On arrive donc à une **identification** entre les grandeurs et leurs mesures : c'est clair chez Descartes, ça l'est encore plus chez Newton.

Ce qui a permis cette identification, ce sont les logarithmes. En 1620, Napier montre l'isomorphisme entre grandeurs ET addition d'une part, mesures ET multiplication d'autre part :

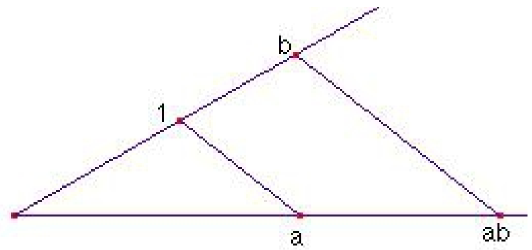
$$\log\left(\left[\frac{A}{B}\right]\times\left[\frac{C}{D}\right]\right)=\log\left(\left[\frac{A}{B}\right]\right)+\log\left(\left[\frac{C}{D}\right]\right)$$

À la moyenne arithmétique correspondra la moyenne géométrique, car :

$$\log\sqrt{xy}=\frac{\log x+\log y}{2}\ .$$

Les deux théories (celle des proportions et celle des fractions) sont désormais liées. L'analogie de structure a été comprise dès ce XVIIe siècle.

La « **révolution** » de Descartes (elle tient en une page et demie, au début de son livre *La Géométrie*, 1736) [voir en annexe] est une véritable révolution intellectuelle, qui gomme toute la théorie des proportions : le produit de deux longueurs peut être une longueur (et non plus nécessairement une surface). Tout se réduit au numérique, à partir du moment où on a choisi une unité.



$$\Rightarrow\ \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{b}}{1}$$

LE XXe SIÈCLE

Les « grandeurs » ont totalement disparu de l'enseignement secondaire (pas complètement du primaire). Or les fractions « passent mal ».
Voici ce qu'en pense Nicolas ROUCHE, dans un article intitulé *Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique* (Repères IREM[11] n° 14, d'avril 1996, pages 25 à 36), dont je vous recopie le début de l'introduction :

10 Citation trouvée dans ***Une histoire des mathématiques, Routes et dédales***, de Amy Dahan-Dalmédico et Jeanne Peiffer, éditions Point-Seuil, 1986, page 103)
11 http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/15_article_99.pdf

Les grandeurs sont le sujet du Cinquième Livre d'Euclide - l'un des plus importants des Éléments - et de nombreux travaux ultérieurs. Elles sont aussi l'objet de multiples observations et opérations quotidiennes : une chose est plus lourde qu'une autre, on ajoute une longueur à une autre, etc.

Or le progrès de la technologie au cours du XX^{e} siècle a abouti à une conséquence paradoxale. En effet, alors qu'un nombre croissant d'actions même parmi les plus quotidiennes s'appuient sur des mesures, les êtres humains manipulent de moins en moins des grandeurs dans des opérations pratiques de mesure : ils lisent directement sur des cadrans les résultats des mesures exécutées par des instruments automatiques.

Au cours du même siècle ou à peu près, les grandeurs ont disparu des mathématiques. Alors qu'elles avaient été au long de l'histoire le matériau même de l'élaboration des nombres, elles ont été remplacées par la théorie des nombres réels directement construits à partir des naturels, eux-mêmes rattachés à la théorie des ensembles. La mesure des grandeurs (à ne pas confondre avec la théorie mathématique de la mesure) est passée dans le domaine de la physique.

Les grandeurs ayant disparu des mathématiques, elles ont aussi quasiment disparu de l'enseignement, tout au moins aux niveaux secondaire et supérieur. Heureusement toutefois, l'étude de la droite réelle demeure associée à l'idée de mesure des longueurs. Il reste quelques traces des grandeurs dans l'enseignement primaire, principalement sous la forme de manipulations introduisant aux fractions et aussi dans l'étude du système décimal de mesures.

Or, même si les grandeurs ont disparu des mathématiques constituées, elles demeurent sans doute un passage obligé pour les enfants. En effet, d'abord nous vivons au milieu d'objets qu'il nous faut, avant même toute idée élaborée de mesure, saisir sous leur aspect de grandeur, et déjà à ce niveau un certain nombre de choses ne vont pas de soi. Ensuite, puisqu'on recourt sans cesse à des mesures dans la vie civilisée d'aujourd'hui, il faut bien apprendre en quoi elles consistent et ce qu'elles nous apportent. Enfin on peut croire que même si les réels peuvent être tirés axiomatiquement des ensembles sans passer par les grandeurs, la genèse des nombres dans chaque esprit passe nécessairement par les grandeurs et leur mesure.

Acceptons donc ce point de départ : il faut enseigner les grandeurs dans les écoles maternelles et primaires. *Bien sûr, il ne faut surtout pas organiser à ce niveau un enseignement axiomatique.* Il faut faire vivre et comprendre aux élèves l'essentiel des phénomènes familiers liés à la comparaison de deux grandeurs de même espèce, à l'addition des grandeurs, à leur multiplication et leur division par un nombre naturel. Ces phénomènes sont plus nombreux qu'on ne le croirait de prime abord.

ANNEXE

Extraits de « La Géométrie » de René Descartes, édition de 1886, Livre premier
Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites.

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaitre la longueur de quelques lignes droites pour les construire.
Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une

espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerais l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut être ordinairement prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux autres comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

Soit par exemple AB l'unité (*figure 1*), et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

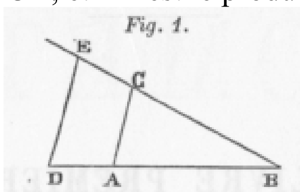


Fig. 1.

Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

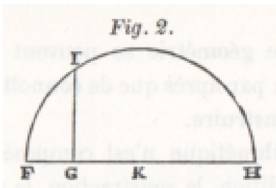
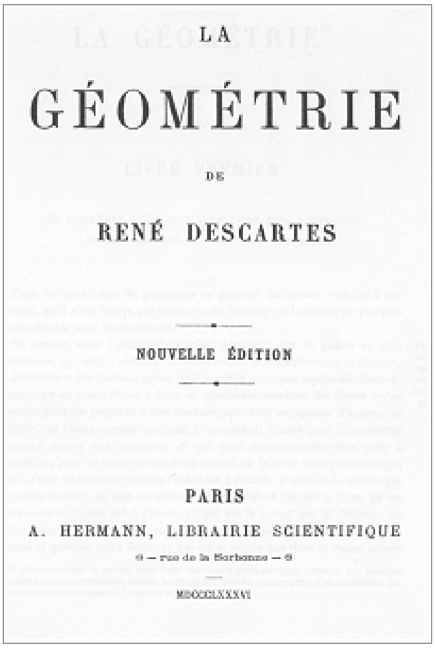


Fig. 2.

Ou, s'il faut tirer la racine carrée de GH (*figure 2*), je lui ajoute une ligne droite FG qui est l'unité et, divisant FH en deux parties égales au point F, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée.


LA

GÉOMÉTRIE

DE

RENÉ DESCARTES

NOUVELLE ÉDITION

PARIS

A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8 — rue de la Sorbonne — 8

MDCCCLXXXVI

Retour au sommaire