LE PROBLÈME DU TRIMESTRE (N°128)

Sur l'algorithme d'Euclide « étendu »

L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le PGCD de deux entiers (ou plus généralement de deux éléments d'un anneau … euclidien, par exemple celui des polynômes à coefficients dans un corps commutatif ; restons en à l'ensemble des entiers pour ce problème),

Algorithme *pour le calcul du pgcd de deux entiers a et b, avec b non nul (prouver qu'il s'arrête bien n'est pas l'objet de ce problème).*
On écrit successivement les divisions euclidiennes (les termes r_k en fin d'égalité désignent les restes et les terme q_k les quotients) :

$a=q_1 b+r_1$, $b=q_2 r_1+r_2$, $r_1=q_3 r_2+r_3$, … $r_{k-2}=q_k r_{k-1}+r_k$ … $r_{n-1}=q_{n+1} r_n+0$,
où r_n *désigne le dernier reste non nul. On a alors* $pgcd(a,b)=r_n$.
Lorsqu'on « étend » l'algorithme d'Euclide pour le calcul de deux entiers a et b, on peut alors de déterminer deux entiers u et v tels que au+bv = pgcd(a,b). (L'identité de Bézout exprime l'existence d'un tel couple).

On peut « remonter » l'algorithme

On écrit ainsi $pgcd(a,b)=r_n=r_{n-2}-q_n r_{n-1}$

$$pgcd(a,b)=r_{n-2}-q_n(r_{n-3}-q_{n-1}r_{n-2})=r_{n-2}(1+q_n q_{n-1})+r_{n-3}(-q_n)=r_{n-2}(1+q_n q_{n-1})+r_{n-3}(-q_n)$$

…

$$pgcd(a,b)=u_n a+v_n b$$

On peut « descendre » l'algorithme

On écrit $r_1=a-b*q_1$

$$r_2=b-q_2 r_1=b-q_2(a-q1*b)=a*(-q_2)+b(1+q_1*q_2)$$

…

$$r_k=r_{k-2}-q_k r_{k-1}=a*\alpha_{k-2}+b*\beta_{k-2}-q_k(a*\alpha_{k-1}+b*\beta_{k-1})=a*(\alpha_{k-2}-q_k\alpha_{k-1})+b*(\beta_{k-2}-q_k\beta_{k-1})$$

…

$$r_n=r_{k-2}-q_n r_{n-1}=a*\alpha_{n-2}+b*\beta_{n-2}-q_n(a*\alpha_{n-1}+b*\beta_{n-1})=a*(\alpha_{n-2}-q_k\alpha_{n-1})+b*(\beta_{n-2}-q_k\beta_{n-1})$$

$$r_n=a*\alpha_n+b*\beta_n=pgcd(a,b)$$

Ces deux algorithmes fournissent alors deux couples (u_n,v_n) *et* (α_n,β_n) *satisfaisant l'identité de Bézout.*

Question : Ces deux couples sont-ils égaux ?

Le responsable de la rubrique est André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr .

retour au sommaire

SOLUTION DU PROBLÈME n°126

Énoncé du problème de devises

Lorsque l'on convertit une somme d'une devise en une autre, on applique un taux de conversion puis on arrondit le résultat au centième, au moins dans dans le cas du franc et de l'euro et sans prétendre à la généralité mondiale.

En 1998 a été fixé le taux de conversion franc/euro. Un euro correspond (ou correspondait) à 6,55957 francs.
Ainsi la conversion de 100 francs est de 15,24 €.
Si on pouvait convertir 15,24 € en francs on obtiendrait 99,97 francs.

Question 1. Quel est l'écart maximum (a) absolu en francs, (b) en pourcentage, lors d'une conversion d'un montant de francs en euros puis reconverti ensuite en francs ?

Question 2. Quel est l'écart maximum en euros lors d'une conversion d'un montant d'euros en francs puis reconverti ensuite en euros ?

Question 3. Les comptes bancaires ont été convertis en euros au 1er janvier 2001, mais la devise utilisée en France est restée le franc sur l'année 2001 (l'euro est devenu la devise officielle le 1er janvier 2002). Ainsi toute opération d'un client effectuée en francs était convertie en euros sur le compte bancaire.
Le 1er janvier 2001, un client souhaite retirer 3000 francs à un distributeur de sa banque (sans frais, et ce montant lui est permis par le contrat de sa carte).Le distributeur fournit des billets de 100 francs. A-t-il intérêt à procéder à un retrait unique de 3000 francs ou à plusieurs retraits pour un montant total de 3000 francs ? (si plusieurs retraits, il conviendra de préciser les montants).

Solution

Aucun lecteur du Petit Vert n'a envoyé de solution. Voici donc des éléments de solution proposés par André Stef.

Remarque préliminaire sur les arrondis : l'arrondi à l'entier le plus proche d'un réel x, qu'on notera $arr_0(x)$, vérifie $arr_0(x) = E(x+0,5)$, où E désigne la fonction partie entière.

L'arrondi « au centième » d'un réel x est alors $arr_2(x)=\frac{1}{10^2}E(10^2x+0,5)$. Il conviendrait d'utiliser ici une telle fonction arr_2, mais nous pouvons tout aussi bien ici, pour parler de valeurs monétaires, travailler en centimes de francs ou d'euros et utiliser la fonction arr_0.

On posera pour la suite $\gamma = 6,55957$(taux de conversion).

retour au sommaire

Question 1. Si x désigne un montant exprimé en centimes de francs, sa conversion y en centimes d'euros vérifie $y = arr_0(x/\gamma)$, puis la conversion de ce montant en centimes de francs z vérifie $z = arr_0(\gamma y)$. On étudie dans cette question $|z-x|$.

On a, par propriété de la fonction partie entière, les doubles inégalités suivantes :

$$x/\gamma - 0{,}5 < y \leq x/\gamma + 0{,}5\ ;$$
$$y\gamma - 0{,}5 < z \leq y\gamma + 0{,}5.$$

On en déduit $x - 0{,}5(\gamma+1) < z \leq x + 0{,}5(\gamma+1)$.

En remarquant que $3 < 0{,}5(\gamma + 1) < 4$ et que x et y sont entiers, on déduit que $x - 3 \leq z \leq x + 3$ et donc que $|(z-x)| \leq 3$.

La remarque de l'énoncé concernant le montant de 100 € permet de conclure que l'écart maximal serait de 3 centimes de francs (imaginer ce qu'une automatisation des opérations boursières sur des ordinateurs auraient pu provoquer dans les bourses européennes quelques minutes après l'introduction de l'euro, si cette double conversion n'avait pas été interdite dans les textes créant l'euro !)

Question 2. De manière analogue au traitement de la question 1, partant d'un montant y en centimes d'euros, converti en une somme z en centimes de francs puis en une somme t en centimes d'euros, on a $y-0{,}5(\gamma^{-1}+1) < t \leq x+0{,}5(\gamma^{-1}+1)$, avec $0 < 0{,}5(\gamma^{-1}+1) < 1$.

y et t étant entiers, on peut conclure que $y = t$. Il n' y aurait pas eu de modification du montant après cette double conversion euros-francs-euros.

On voit bien que la différence de situation entre les questions 1 et 2 provient du fait que $\gamma > 1$.

Question 3. Comme signalé en énoncé, si on retirait 100 francs, le compte était alors débité de 15,24 €. Le retrait de 200 francs amenait un débit de 30,49 € (donc supérieur strictement à 2x15,24 €). On peut alors constater (à la « main », sur tableur ou autre) que le retrait de n billets de 100 francs (pour n entier naturel quelconque supérieur à 2 et inférieur à 30, c'est également vrai pour tout entier naturel supérieur à 2 mais cela dépasse le cadre d'une étude exhaustive) entraine à chaque fois un débit strictement supérieur à 15,24n exprimés en euros. Il convenait donc durant l'année 2001 d'effectuer des retraits de 100 francs, afin de faire des économies… de quelques centimes d'euros.

Billet de 100 francs Cézanne 1997-1998

retour au sommaire

SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT (n°127)

Problème proposé par Jacques Choné

On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. Déterminer l'espérance du temps d'attente de la première fois où l'on obtient trois résultats consécutifs identiques (i.e. soit PPP, soit FFF).

Solution (d'après Jacques CHONÉ) : aucune solution n'a été envoyée, voici donc des éléments de solution.

Soit X la variable aléatoire égale au rang où l'on obtient pour la première fois trois résultats consécutifs identiques. Le support de X (ensemble des valeurs qu'elle peut prendre) est l'ensemble des entiers au moins égaux à 3. On a, par exemple,

$$P(X=3)=P(PPP \cup FFF)=\frac{1}{4} \qquad P(X=4)=P(FPPP \cup PFFF)=\frac{1}{8}$$

Pour n entier naturel non nul, soit v_n le nombre de mots sur l'alphabet $\{F,P\}$ de longueur n finissant par F et ne comportant aucun sous-mot du type PPP ou FFF. On notera V_n l'ensemble de ces mots.

Pour des raisons de symétrie, on a, pour $n \geq 4$, $P(X=n)=\dfrac{2\,v_{n-3}}{2^n}=\dfrac{v_{n-3}}{2^{n-1}}$.

Montrons par récurrence que pour tout n entier naturel non nul, on a $v_n = F_{n+1}$, où $(F_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite de Fibonacci définie par $F_0=1$, $F_1=1$ et, pour tout entier naturel n, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.
On a : $v_1 = 1 = F_2$, $v_2 = 2 = F_3$.

Soit n un entier au moins égal à 3. Supposons que $v_{n-1} = F_n$ et $v_{n-2} = F_{n-1}$.
V_n est la réunion disjointe de V'_n , l'ensemble des éléments de V_n finissant par FF et de V''_n , l'ensemble des éléments de V_n finissant par PF.

Le terme figurant juste avant FF dans un mot de V'_n est nécessairement P ; comme P et F jouent des rôles symétriques dans la partie avant FF, on en déduit que le nombre d'élément de V'_n est v_{n-2}.

Comme P et F jouent des rôles symétriques dans les $n-1$ premiers termes d'un mot de V''_n , le nombre d'éléments de cet ensemble est v_{n-1}.
On en déduit que $v_n = v_{n-1} + v_{n-2} = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$. Ce qui termine la récurrence.

On a donc, pour $n \geq 4$, $P(X=n)=\dfrac{F_{n-2}}{2^{n-1}}$, formule également vraie pour $n=3$.

La série génératrice de X, de rayon de convergence $R=\dfrac{4}{1+\sqrt{5}} > 1$, vérifie donc

$$g(x)=2\sum_{n\geq 3} F_{n-2}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{x^2}{2}\sum_{n\geq 0} F_n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{x^2}{2}\,\frac{x/2}{1-(x/2)-(x/2)^2}=\frac{x^3}{4-2x-x^2}$$

car la fonction génératrice S des nombres de Fibonacci vérifie $S(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$

L'espérance demandée est alors : $\boldsymbol{E(X) = g'(1) = 7}$.

retour au sommaire