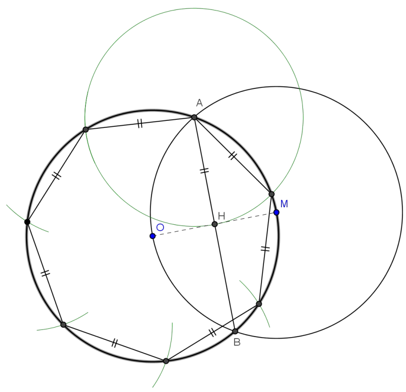
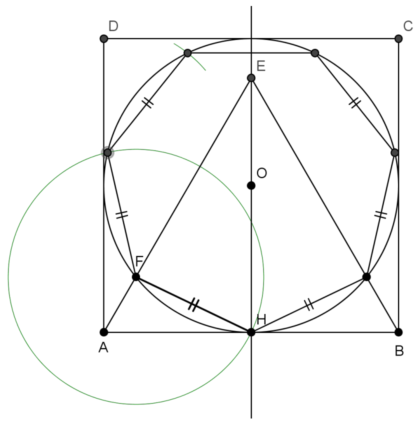
SOLUTION DU SOPHISME N°126 (construction d'un heptagone régulier)

Nous vous proposions, dans notre précédent numéro, deux méthodes pour construire, à la règle et au compas, un heptagone régulier.

Première méthode. On considère un premier cercle de centre O et de rayon OM (c'est dans ce cercle que s'inscrira l'heptagone), et un second cercle de centre M et de même rayon. Ces deux cercles se coupent en A et B, et H est le milieu de [AB].
On reporte alors, sur le premier cercle, sept fois un segment égal à [AH]. On obtient ainsi un heptagone.



Seconde méthode . On considère un carré ABCD, et le triangle équilatéral ABE intérieur à ce carré. On trace le cercle inscrit dans le carré : il est tangent à [AB] en H. Le segment [AE] coupe ce cercle en F. [HF] est un des côtés de l'heptagone ; il suffit de reporter encore six fois un segment égal à [HF] sur le cercle, et on obtient l'heptagone complet.



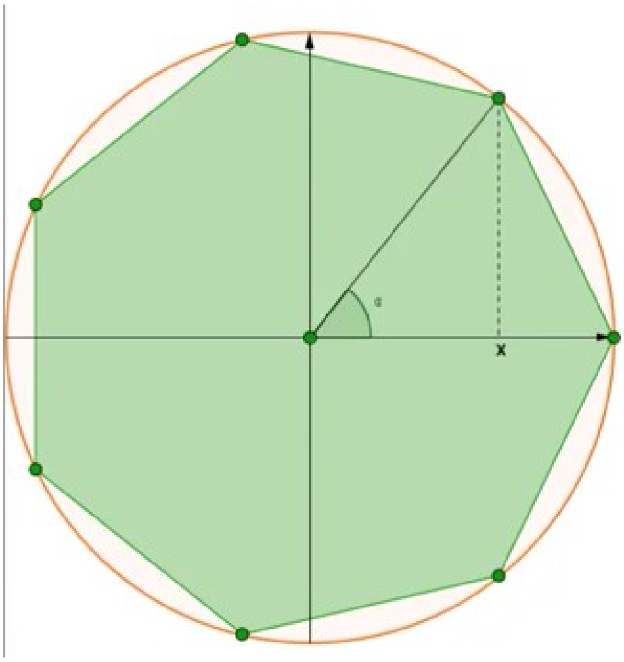
La simplicité de ce second tracé fait penser que c'est peut-être ce qui a été utilisé par les tailleurs de pierres au moyen-âge.

On peut retrouver ces deux constructions sur le Net, par exemple sur
http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille7/enonces/heptagoneregulier.html
Cependant, Wikipédia nous rappelle que le tracé d'un heptagone régulier ne peut être obtenu à la règle et au compas (théorème de Gauss) : http://fr.wikipedia.org/wiki/Heptagone

En réalité, les figures que nous avions faites semblaient correctes, mais pour tracer le septième côté de l'heptagone, nous nous étions contentés de joindre l'extrémité du sixième segment avec le point de départ du premier. Nous vous laissons vérifier que ce dernier segment n'a pas la même longueur que les six autres (l'erreur est très faible, et invisible sur la figure - elle n'est que de 1,2 % environ ; on peut faire inscrire la longueur des segments par le logiciel de géométrie dynamique pour s'en convaincre).
Pour la seconde méthode, nous avons utilisé l'axe de symétrie ; la longueur du côté supérieur de l'heptagone est alors supérieure de 0,7 % environ à celle des six autres côtés : cette construction est donc plus précise que la première.
La vérification par le calcul est possible (mais assez ardue) pour un élève de lycée.
On pourrait se demander ce que fait GeoGebra quand on lui demande de tracer un heptagone régulier. En réalité il trace un polygone de 7 côtés qui est « presque » régulier. Par exemple, à partir d'un premier segment a de longueur 4, les six autres qui sont construits ont pour longueurs respectives :
$b = 3{,}999999999999998$, $c = d = e = 3{,}999999999999999$, $f = 4$ et $g = 4$ (rappel : la précision maximale sur GeoGebra est 10^{-15}). Merci Noël !
Dans la vidéo https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=41DD2V8Ufz, nous avons le calcul exact des abscisses des sommets d'un heptagone régulier. Nous

Retour au sommaire

remarquons que l'équation à résoudre est du troisième degré, ce qui nous confirme le fait que ses solutions ne sont pas constructibles à la règle et au compas.



$$\alpha = \frac{2\pi}{7} \text{ donc } \cos(3\alpha) = \cos(4\alpha)$$

$$\text{on pose } \cos(\alpha) = x$$

$$\cos(3\alpha) = 4x^3 - 3x$$

$$\cos(4\alpha) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 3x = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } 8x^3 + 4x^2 - 4x = 1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\text{ou } x = \frac{\sqrt[3]{28 + 84i\sqrt{3}}}{12} + \frac{7}{3\sqrt[3]{28 + 84i\sqrt{3}}} - \frac{1}{6}$$

$$\text{ou } x = \frac{-1+i}{24}\sqrt[3]{28 + 84i\sqrt{3}} - \frac{7(1+i\sqrt{3})}{6\sqrt[3]{28 + 84i\sqrt{3}}} - \frac{1}{6}$$

$$\text{ou } x = \frac{-1-i}{24}\sqrt[3]{28 + 84i\sqrt{3}} - \frac{7(1-i\sqrt{3})}{6\sqrt[3]{28 + 84i\sqrt{3}}} - \frac{1}{6}$$

Voir aussi http://www.lmpt.univ-tours.fr/~licois/Vulgarisation/polygoneHD.pdf
(pages 10-11-12). Merci Noël pour ce lien.

Autre site, très intéressant, à visiter à propos de l'heptagone :
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Histoire/Heptagon.htm#constru
On y trouvera en particulier la photo de ce puits heptagonal du château de Nantes...

… et celle-ci, tirée de la série « Le Trône de fer »

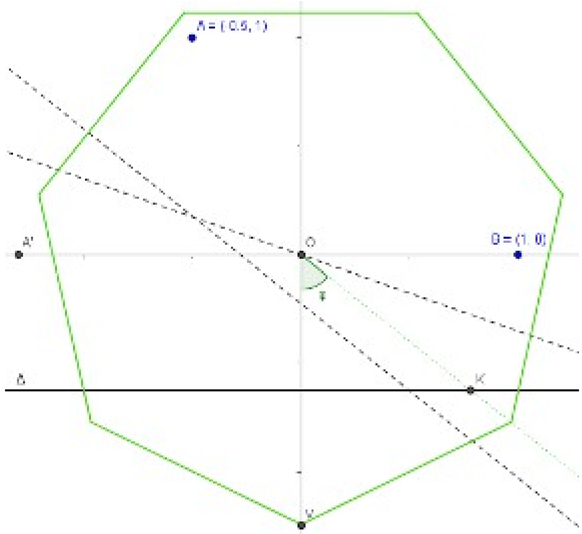
A la page suivante, la construction de l'heptagone régulier par pliage ➔

Retour au sommaire

Construction d'un heptagone régulier par le pliage

Méthode proposée par Jacques Justin

Voir https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/L_Ouvert/n047/o_47_1-14.pdf
https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/L_Ouvert/n042/o_42_9-19.pdf §6



On détermine par pliage un repère orthonormé et une unité. Toujours par pliage on place A(-0,5 ; 1) et B(1 ; 0). On détermine le pli qui permet d'amener A sur l'axe des abscisses et B sur l'axe des ordonnées : B est amené en V et A en A'. On marque en pliant la médiatrice de [OV]. On détermine le pli passant par O qui amène B sur cette médiatrice. B est amené en K sur cette droite.

Il faut démontrer que $\widehat{VOK}=\frac{2\pi}{7}$.

Puisque par construction OK=OB et que OB=1 il est pratique de calculer les coordonnées de K et de vérifier que l'ordonnée de K est $-cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. On note p le coefficient directeur de (AA'). Une équation de (AA') de coefficient directeur p passant par A est $y = p(x+0{,}5) + 1$.

On en déduit que A' a pour coordonnées $\left(\frac{-1}{p};0\right)$.

La droite (BV) a par construction le même coefficient directeur et donc son équation est $y=p(x-1)$. Ainsi V a pour coordonnées $(0;-p)$.

Une équation de la médiatrice de [OV] est $y=\frac{-p}{2}$. L'ordonnée de K est donc $\frac{-p}{2}$.

Il faut désormais trouver p ou au minimum trouver une équation en fonction de p.

Il restera à prouver que $-\frac{p}{2}=-cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ donc que $p=2cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

On a utilisé le fait que (AA') et (BV) avaient le même coefficient directeur mais pas le fait que la droite passant par les milieux de [AA'] et [BV] a pour coefficient directeur $\frac{-1}{p}$.

Le milieu de [AA'] a donc pour coordonnées $\left(\frac{-1}{2p}-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et le milieu de [BV] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};-\frac{p}{2}\right)$

Le coefficient directeur de la droite passant par ces deux points est $\left(\frac{\frac{-p}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2p}}\right)$ qui doit donc être égal à $\frac{-1}{p}$.

En égalant les deux quantités on obtient $p^3 + p^2 - 2p - 1 = 0$. On note (E) le premier membre de cette équation.

Contrôlons que $2cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ vérifie cette équation. Notons désormais $\frac{2\pi}{7}=\alpha$.

Comme $2cos(\alpha)=e^{ai}+e^{-ai}$, (E) devient :

$$(e^{ai}+e^{-ai})^3+(e^{ai}+e^{-ai})^2-2(e^{ai}+e^{-ai}) = e^{3ai}+3e^{ai}+3e^{-ai}+e^{-3ai}+e^{2ai}+2+e^{-2ai}-2^{ai}-2e^{-ai}-1$$

On assemble les termes qui permettent de retrouver cos(3α), cos(2α) et cos(α).

(E) devient : 2cos(3α)+2cos(2α)+2cos(α)-1.

En observant cette équation et les doubles et se souvenant que $\alpha=\frac{2\pi}{7}$, il vient que 7α=2π.

Ainsi, en utilisant les angles supplémentaires on obtient les égalités :
$\cos(\alpha)= \cos(6\alpha)$, $\cos(2\alpha)=\cos(5\alpha)$ et $\cos(3\alpha)=\cos(4\alpha)$.

(E) peut alors s'écrire, en décomposant les doubles :
$\cos(6\alpha)+\cos(5\alpha)+\cos(4\alpha)+\cos(3\alpha)+\cos(2\alpha)+\cos(\alpha)-1$.

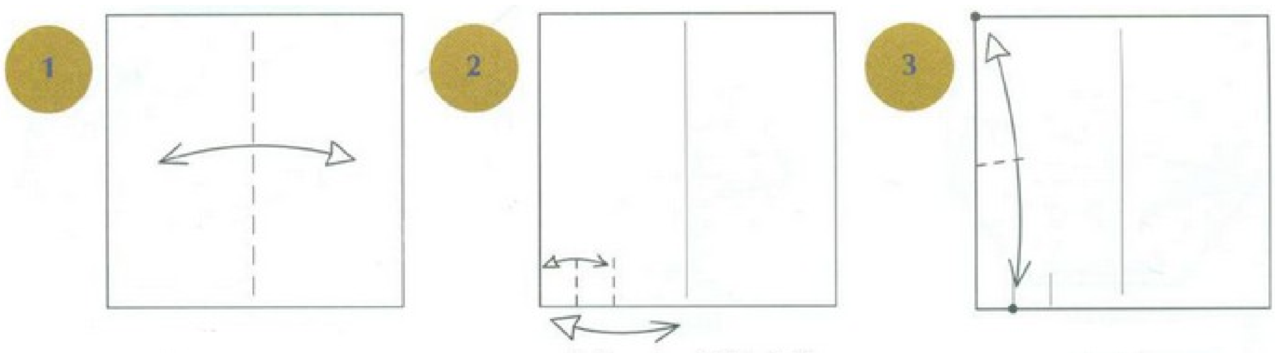
On reconnait ici la partie réelle de: $\frac{(e^{7\alpha i}-1)}{(e^{\alpha i}-1)}$. Et puisque $e^{7\alpha i}-1=0$, (E)vaut bien zéro.

Ainsi $\cos(\alpha)$ vérifie bien l'équation mais n'est peut être pas la valeur recherchée : a priori *(*E) = 0 admet 3 solutions. En étudiant la fonction $f(p) = p^3 + p^2 - 2p -1$, on observe qu'il existe une seule valeur positive qui annule cette fonction.

Ainsi on vient de démontrer que l'angle est bien $\frac{2\pi}{7}$ et pas un autre.

Pour obtenir l'heptagone on reporte l'angle obtenu sur le dessin ci-dessus.

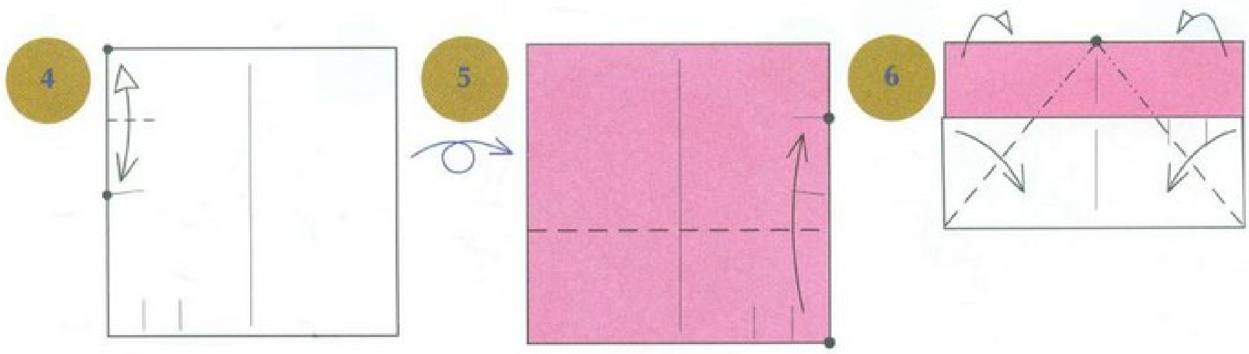
Au point de vue pratique, voici les étapes du pliage correspondant



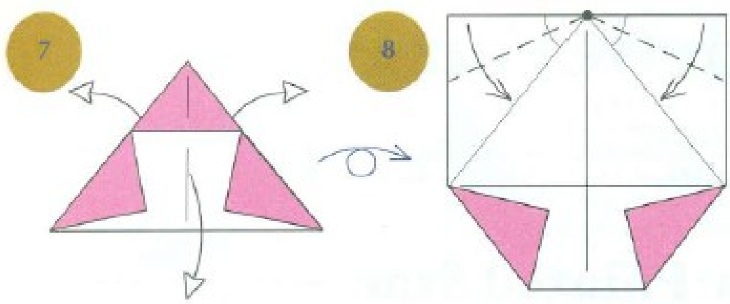
plier puis déplier

plier et déplier deux fois au milieu

plier et déplier à gauche



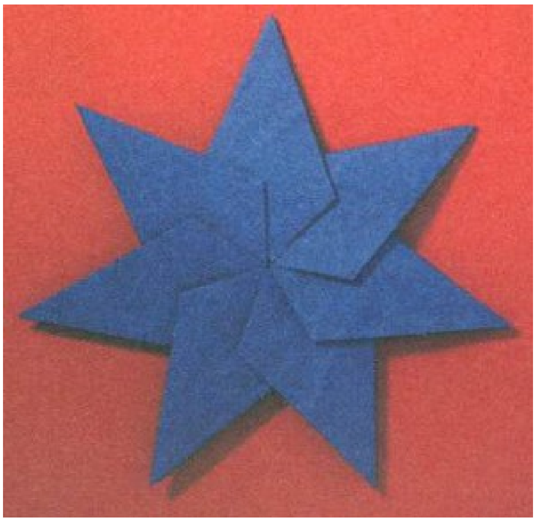
plier et déplier à gauche



déplier

Après avoir obtenu l'heptagone par pliage, on peut poursuivre pour obtenir ceci :

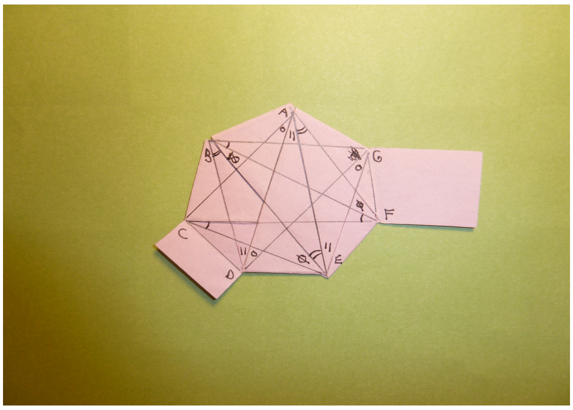
Retour au sommaire



Référence de l'ouvrage où trouver ce pliage : https://books.google.fr/books?id=1JFOBAAAQBAJ&pg=PA89&lpg=PA89&dq=Montroll+seven+pointed+star&source=bl&ots=BJIH1HxoUb&sig=mLp6nLMBaePNOgom6a8DtZVhn-Y&hl=fr&sa=X&ved=0ahUKEwi-oIHW943NAhXMfxoKHWgHAfMQ6AEIPDAI#v=onepage&q=Montroll%20seven%20pointed%20star&f=false

Et en classe...

On peut proposer dès l'école primaire de construire un pentagone régulier en faisant un nœud.
On trouve ce pliage dans certains.
Cette construction est indiquée dans un ouvrage d'Urbano d'Aviso publié à Rome en 1682[2].
En fait, on peut obtenir tout polygone régulier d'ordre impair en faisant un nœud.
Voici un heptagone construit par cette méthode pouvant servir comme support pour une démonstration.



Bibliographie : bulletin APMEP *http://www.apmep.fr/IMG/pdf/12-Origami-C.pdf*

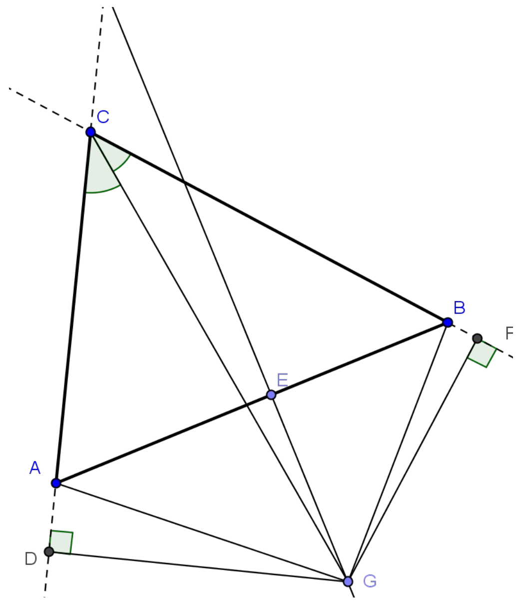
[2]Référence à la page 202 de « Récréations Mathématiques » d'Édouard Lucas :
http://edouardlucas.free.fr/oeuvres/recreations_math_02_lucas.pdf

Retour au sommaire

LE SOPHISME DU TRIMESTRE (n° 127)

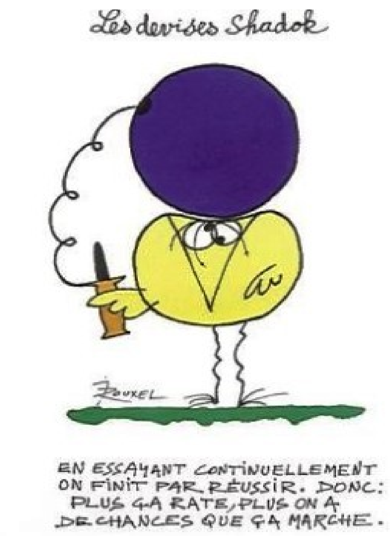
La définition du dictionnaire Robert est la suivante : « *Argument, raisonnement faux malgré une apparence de vérité* ». Pour étudier ces sophismes, il est recommandé de faire les figures « à main levée », même si elles ne sont pas tout a fait exactes. L'usage de logiciels de géométrie dynamique est absolument proscrit. Le Petit Vert vous proposera régulièrement des sophismes, comme celui qui suit. Envoyez toute nouvelle proposition à jacverdier@orange.fr.

Théorème : **Tout triangle est isocèle.**



Soit ABC un triangle quelconque. On considère la bissectrice issue de C et la médiatrice de [AB] : elles se coupent en G.
De G, on mène les perpendiculaires GD et GF sur les droites CA et CB. Les angles DCG et GCF sont égaux. Les triangles rectangles GCD et GCF, ayant leur hypoténuse commune et les angles en C égaux sont donc égaux, donc GD = GF.
D'autre part, GA = GB car G est sur la médiatrice de AB.
Les triangles GDA et GFB sont donc eux aussi égaux.
On a donc d'une part CD = CF (premier couple de triangles égaux) et d'autre part DA = FB (second couple de triangles égaux).
D'où l'on conclut que CA = CB.
Le triangle ABC est donc isocèle. Le théorème est démontré.
N.B. La démonstration reste valide si G est à l'intérieur du triangle ABC, et même si G est sur [AB].

LA PHRASE DU TRIMESTRE



Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne règnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera « je ne sais pas le reste ».

Évariste Galois (1811-1832, France)

Retour au sommaire