

LE PROBLÈME DU TRIMESTRE (n°126)**Problème de devises**

Lorsque l'on convertit une somme d'une devise en une autre, on applique un taux de conversion puis on arrondit le résultat au centième, au moins dans le cas du franc et de l'euro et sans prétendre à la généralité mondiale.

En 1998 a été fixé le taux de conversion franc/euro. Un euro correspond (ou correspondait) à 6,55957 francs.

Ainsi la conversion de 100 francs est de 15,24 €.

Si on pouvait convertir 15,24 € en francs on obtiendrait 99,97 francs.

Question 1. Quel est l'écart maximum (a) absolu en francs (b) en pourcentage, lors d'une conversion d'un montant de francs en euros puis reconverti ensuite en francs ?

Question 2. Quel est l'écart maximum en euros lors d'une conversion d'un montant d'euros en francs puis reconverti ensuite en euros ?

Question 3. Les comptes bancaires ont été convertis en euros au 1^{er} janvier 2001, mais la devise utilisée en France est restée le franc sur l'année 2001 (l'euro est devenu la devise officielle le 1^{er} janvier 2002). Ainsi toute opération d'un client effectuée en francs était convertie en euros sur le compte bancaire.

Le 1^{er} janvier 2001, un client souhaite retirer 3000 francs à un distributeur de sa banque (sans frais, et ce montant lui est permis par le contrat de sa carte). Le distributeur fournit des billets de 100 francs. A-t-il intérêt à procéder à un retrait unique de 3000 francs ou à plusieurs retraits pour un montant total de 3000 francs ? (si plusieurs retraits, il conviendra de préciser les montants)

Le responsable de la rubrique est André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr.

NB (du responsable de la rubrique) : n'étant pas très à l'aise avec les problèmes de géométrie, il ne faut donc pas compter sur lui pour en proposer. Il est donc fait particulièrement appel aux lecteurs pour suggérer de tels problèmes.

SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT (n°125)

Énoncé du problème

Démontrer qu'il existe une unique suite $(f(n))$ croissante, de premier terme $f(1)=1$, et telle que, pour tout entier naturel non nul n , on a $f(n)=\text{card}\{m, f(m)=n\}$.

La condition de monotonie est-elle nécessaire ?

Jacques Choné a transmis une réponse. J'ai convenu avec lui que cette démonstration pouvait manquer de rigueur : derrière un « etc. » peuvent se cacher des difficultés réelles. Et en l'occurrence, il n'est pas établi que le procédé de construction mis en place ne va pas « gripper » à un moment. Ce ne sera pas le cas, certes, et on peut accepter cette démonstration pour se faire une idée de la suite.

La justification de l'existence de cette suite a d'ailleurs été posée en problème de l'APMEP car le responsable de la brochure n'a jamais trouvé de justification suffisamment rigoureuse de son existence (la suite de Golomb est bien connue et étudiée, son existence ne pose pas souci à un mathématicien au point de devoir la justifier... ?). On trouve sur internet des définitions (erronées donc) de la suite de Golomb qui ne mentionnent pas la condition croissance.

Remarque : Sur Wikipedia, la condition de croissance est remplacée par la condition que c'est la plus petite suite vérifiant $f(1)=1$ et telle que, pour tout entier naturel non nul n , on a $f(n) = \text{card}\{m, f(m)=n\}$; la monotonie est alors une propriété (remarque : comprendre alors le sens de « la plus petite suite... »).

Solution proposée par Jacques Choné

Il s'agit de la suite de Golomb (suite A001462 de « The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) ») : <https://oeis.org/A001462>.

On détermine de façon unique ses éléments successifs comme suit.

On remarque que pour chaque valeur de n ($n \geq 1$), $f(n)$ est le nombre d'apparition de n dans la suite. Comme la suite est croissante avec $1 = f(1)$, égal au nombre d'apparition de 1 dans la suite, on a, pour tout $n \geq 2$, $f(n) \geq 2$.

Puisque $f(2)$, égal au nombre d'apparitions de 2 dans la suite, est au moins égal à 2, le nombre 2 figure dans la suite ; si on avait $f(2) \geq 3$, 2 devrait figurer au-delà du second terme de la suite ce qui est en contradiction avec la croissance de la suite, donc $f(2) = 2$; donc le nombre 2 figure deux fois dans la suite, ce qui impose $f(3) = 2$.

Le nombre 3 figure donc 2 fois dans la suite d'où : $f(4) = f(5) = 3$.

Les nombres 4 et 5 figurent donc 3 fois dans la suite, d'où, par le même raisonnement : $f(6) = f(7) = f(8) = 4$ et $f(9) = f(10) = f(11) = 5$; etc.

Remarques :

1. Il est facile de programmer, par exemple en python, la liste des termes de cette suite inférieurs ou égaux à n :

```
def g(n):
    g=[1,2,2]
    for i in range(3,n+1):
        g+=[i]*g[i-1]
    return(g)
```

$g(10) \rightarrow [1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10]$

2. On peut démontrer (voir les références dans l'OEIS) que la suite de Golomb obéit à la relation de récurrence : $f(1) = 1$ et pour tout $n(n \geq 1)$, $f(n+1) = 1 + f(n+1 - f(f(n)))$ et même que, pour tout $n(n \geq 1)$, $f(n)$ est le plus proche entier de $\Phi^{2-\Phi} n^{\Phi-1}$ où $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

3. La condition de monotonie est-elle nécessaire ?

Si on abandonne la condition de monotonie, on peut construire de multiples façons une suite $f(n)$ telle que, par exemple, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$ et que, pour tout entier naturel non nul n , on ait $f(n) = \text{card}\{m, f(m)=n\}$: il doit donc y avoir dans cette suite 3 fois le nombre 2 et 2 fois le nombre 3 ; elle peut donc commencer par 1,3,2,2,2,3 . Ensuite, puisque $f(4) = f(5) = 2$, on peut prendre 1,3,2,2,2,3,4,4,5,5 et continuer par la même méthode.

Programmation en Python :

```
def gol(n,li):
    l=li
    for k in range(1,n+1):
        l+= [k+1]*(l[k]-l.count(k+1))
        k+=1
    return(l)
```

$\text{gol}(8,[1,3,2]) \rightarrow [1, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9]$

$\text{gol}(8,[1,4,3]) \rightarrow [1, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9]$

Solution d'André Stef

Démonstration par récurrence.

On suppose construites pour un certain entier $n \geq 2$, les valeurs $f(k)$ pour tout $k \in f^{-1}([1, n])$ (c'est-à-dire qu'on connaît toutes les k tels que $f(k) \in (1, n)$, que cet ensemble est un intervalle fini de nombres entiers $(1, a_n)$ et que $a_n > n$.

Initialisation $n=2$

$f(1) = 1$ et donc pour tout $k > 1$ on a nécessairement $f(k) > 1$.

$f(2) = 2$, de manière nécessaire car 2 a au moins un antécédent ($f(2) \geq f(1) = 1$) et la croissance de f impose également que l'image de 2 soit alors 2 (en effet, soit k tel que $f(k) = 2$, on a alors $1 < f(2) \leq f(k) = 2$). La croissance de f impose alors également $f(3) = 2$, et 2 ne peut avoir d'autre antécédent que 2 et 3. On pose donc ainsi les valeurs de f sur $[1, 3]$, et on pose $a_2 = 3$. L'hypothèse est donc bien vérifiée pour $n = 2$.

Au rang $n+1$

$a_n > n$, donc $f(n+1)$ est défini (ce qui me semble être le point qui empêche que cela « grippe »). La croissance de f impose (et on le pose alors) que $f(k) = n+1$ pour tout $k \in [a_n + 1, a_n + f(n+1)]$.

En définissant $a_{n+1} = a_n + f(n+1)$, on a donc défini f sur l'intervalle $[1, a_{n+1}]$ où f prend ses valeurs dans $[1, n+1]$.

Comme $a_n > n$, on a alors $a_{n+1} = a_n + f(n+1) \geq a_n + f(1) > n+1$.

Cela achève d'établir f au rang $n+1$, de manière imposée par les conditions.

On a ainsi établi l'existence (ainsi définie) et l'unicité de f .