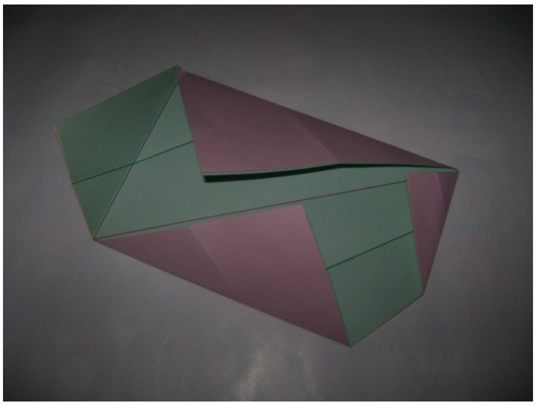
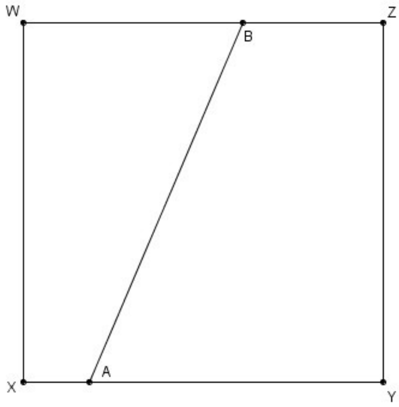
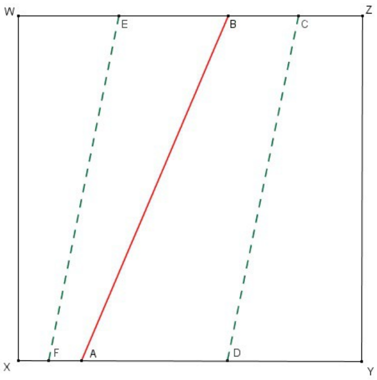
DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°126-a



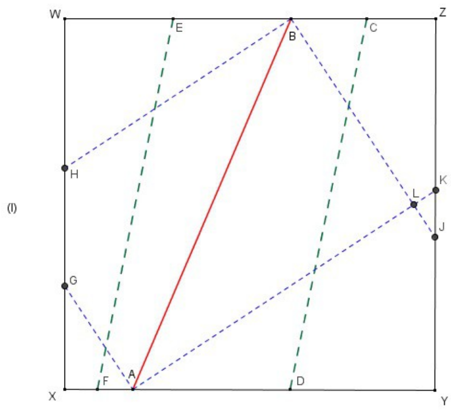


On dispose d'un carré de papier. Sur deux des côtés de ce carré WXYZ, on place deux points quelconques A et B que l'on joint. On plie le côté [YZ] de façon qu'il vienne coïncider avec la droite (AB), et le côté [WX] de façon qu'il vienne coïncider avec la droite (AB). On marque ces plis, nommés (CD)et (EF) - en pointillés verts sur le dessin ci-dessous à gauche -, puis on remet la feuille à plat.



On plie ensuite les quatre coins de façon qu'ils viennent coïncider avec la droite (AB). Sur l'exemple ci-dessous à droite, (BW) se rabattant sur (AB) donnera une droite (BH) ; de même (AX) donnera (AG), (BZ) donnera (BL) et (AY) donnera (AL). On obtient ainsi quatre nouvelles droites - en pointillés bleus sur la figure.

Il se peut que ces droites se coupent en dehors de la feuille carrée initiale : sur notre exemple, c'est le cas de (BH) et (AG) qui se coupent en un point I situé en dehors du carré.



Le défi

– Les droites (CD) et (EF) sont-elles toujours parallèles ?
– Les quatre plis en pointillés bleus forment-ils toujours un rectangle (ou une ébauche de rectangle) ?

Question subsidiaire : si on part d'une feuille rectangulaire, les propriétés évoquées ci-dessus sont-elles encore vraies ?

Envoyez toute proposition de solution à Jacques Verdier

retour au sommaire

DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°126-b

On dispose d'une grille « genre sudoku » et de 36 jetons.

O		O						
		O						

Il s'agit de placer les 36 jetons dans cette grille en respectant les contraintes suivantes :

- chacune des 9 lignes horizontales, chacune des 9 lignes verticales et chacune des deux diagonales doit contenir exactement 4 jetons ;
- les « grosses cases » (formées de 9 petites cases) doivent contenir respectivement 0, 1, 2 ... 8 jetons ;
- dans chaque « grosse case », la disposition des jetons doit avoir au moins un axe ou un centre de symétrie (c'est la cas dans l'exemple ci-dessus, où la première case contient 3 jetons avec un axe de symétrie qui est une des diagonale). Et si vous arrivez à obtenir au moins un axe **et** un centre de symétrie dans chauque case, c'est encore mieux !

Bonne recherche !!!

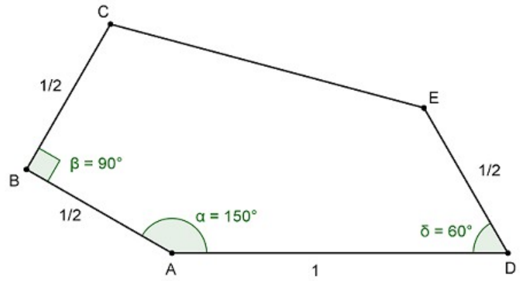
Envoyer toute proposition de solution à Jacques Verdier

retour au sommaire

SOLUTION DU DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°125-a

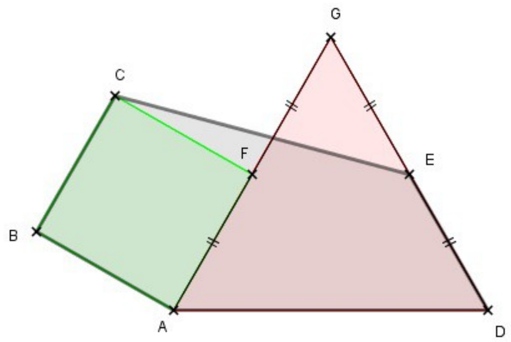
La quinzième « tuile » des pavages pentagonaux

Un pentagone (découvert très récemment, en 2015), permet de « paver le plan » à l'infini (voir image de gauche).



Première construction (voir dessin) :

Un segment AD est pris comme unité.
On construit successivement l'angle DAB de 150° ; le côté AB de longueur ½ ;
l'angle ABC droit ; le côté BC de longueur ½ ;
l'angle ADE de 60° ; le côté DE de longueur ½ ;
on joint C et E.
On obtient un pentagone ABCED.



Seconde construction (voir dessin) :

Un segment AD est pris comme unité.
On construit le triangle équilatéral ADG ;
on construit les points F et E milieux de [AG] et [DG] ;
on construit le carré ABCF ;
on joint C et E.
On obtient un pentagone ABCED.

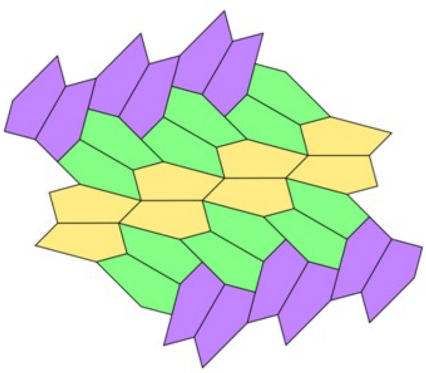
● Pouvez-vous démontrer que ces deux constructions conduisent bien au même polygone ?

La réponse était OUI, et c'est assez facile de le prouver : d'après les énoncés des constructions, il est facile de montrer que les segments [AB], [BC], [AD] et [DE] seront superposables.

● Pouvez-vous calculer la longueur <u>exacte</u> du cinquième côté (CE) ?
La question était plus difficile, et vous trouverez ci-après quelques informations permettant d'obtenir la réponse : $EF = \dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

Le pentagone de Bothell

Cette 15ème « tuile » pentagonale, qui permet de paver le plan à l'infini, a été découverte en aout 2015 par une équipe de l'université de Washington-Bothell grâce à un programme informatique conçu pour l'occasion.
« *Nous avons découvert la tuile en faisant une recherche exhaustive sur un ordinateur grâce à un ensemble de possibilités très large mais fini* », a expliqué Casey Mann, membre de cette équipe, au journal Le Guardian, en ajoutant que l'équipe avait été « *un peu surprise* » de découvrir ce nouveau type de pentagone.



retour au sommaire

Voici quelques pistes qui permettent de construire ce pentagone et de déterminer facilement ses mesures.

- **Mesure des angles BEF et GFE**

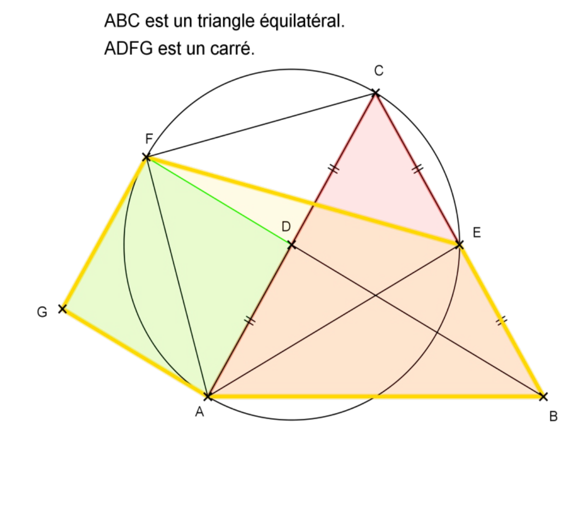
Les triangles *AFC* et *AEC* étant rectangles respectivement en *F* et en *E*, ils sont inscrits dans le cercle de diamètre [*AC*].

Les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ACF}$ sont inscrits dans le même cercle et interceptent tous les deux l'arc *AF*, ils ont la même mesure.

Les angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{ACE}$ sont aussi inscrits dans le même cercle et interceptent tous les deux l'arc *AE*, ils ont donc la même mesure.

$\widehat{AEF}=45°$ et $\widehat{AEB}=90°$ 90°

On déduit de ce qui précède la mesure des angles $\widehat{GFE}$ et $\widehat{BEF}$.



- **Longueur EF**

Le triangle *EFH* étant inscrit dans le cercle de diamètre [*FH*], il est rectangle en *E*.

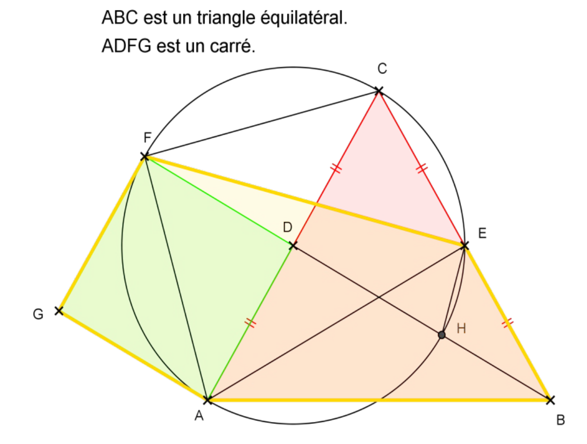
Ainsi,

$$EF = FH \times cos(\widehat{EFH}) = 1 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

On peut aussi utiliser la formule :

$$\frac{sin(\widehat{EAF})}{EF} = \frac{sin(\widehat{AF})}{AF} = \frac{sin(\widehat{AFE})}{AE}$$

Les longueurs *AF* et *AE* se calculent à l'aide du théorème de Pythagore.



La longueur exacte du segment [EF], qui était demandée dans ce défi, vaut donc

$$EF = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

C.Q.F.D

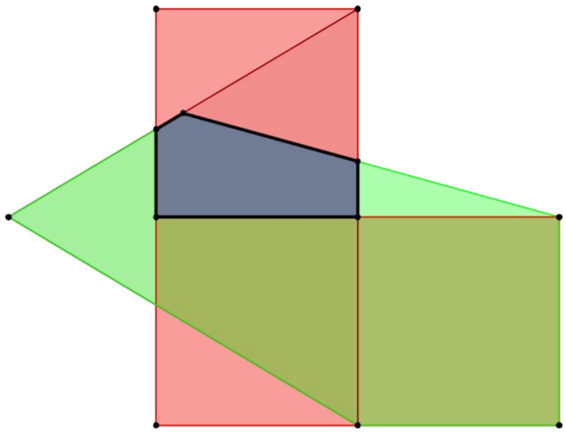
Et en page suivante, un complément surprenant...

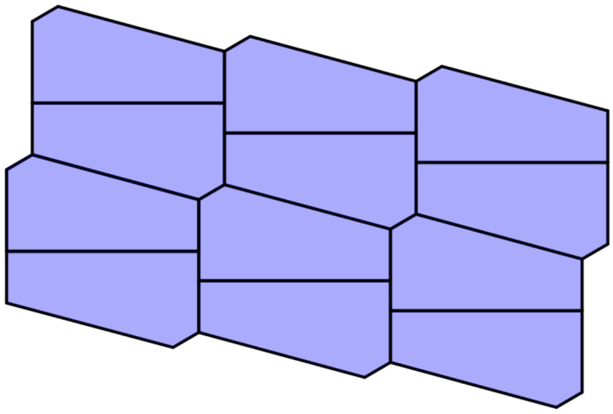
retour au sommaire

Bothell et Petit L

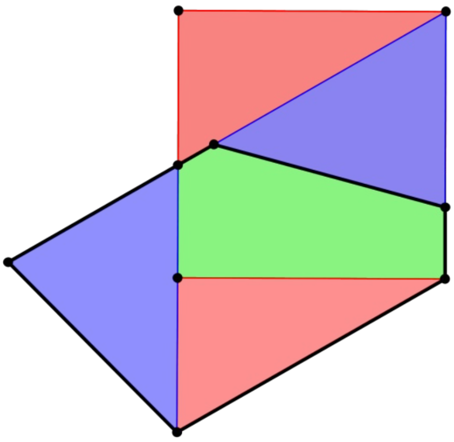
Par Fathi DRISSI

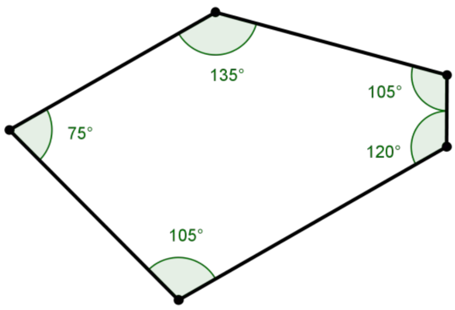
Surprise ! Lorsqu'un pentagone de Bothell (le pentagone vert) et un petit L (que vous avez déjà côtoyé dans notre numéro 123 pages 58 et 60) se rencontrent, ils donnent naissance à un pentagone bleu qui pave le plan : c'est la moitié d'un hexagone dont les côtés opposés sont parallèles.





Et ce n'est pas fini ! Le carré supérieur du petit L est constitué de trois pièces qui forment à leur tour deux pentagones pavant le plan.





Je laisse au lecteur le plaisir de trouver l'autre assemblage permettant d'obtenir le deuxième pentagone !

SOLUTION DU DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°125-b

Rappel de l'énoncé

Dans le tableau « Hardy's Taxi » d'Eugen Jost (voir Petit Vert n°124) on trouve ces deux nombres : **1031223314** et **10213223**.

Ces deux nombres ont la particularité suivante : Dans le premier il y a : un 'zéro', trois 'un', deux 'trois', trois 'trois' et un 'quatre', ce que l'on peut énoncer « 1 0, 3 1, 2 2, 3 3, 1 4 ». Le décompte des chiffres doit se faire dans l'ordre : d'abord les '0', puis les '1', les '2' etc. On retrouve bien le nombre 1031223314. Il en est de même pour le second nombre, 10213223.

Par exemple, si l'on prend comme nombre initial 1, on obtient successivement : 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, 41122314, 31221324, 21322314, 21322314, 21322314... On constate que la suite « stagne » à partir d'un certain moment. Les deux nombres évoqués ci-dessus « stagnent » également.

Le défi

- Tous les nombres initiaux donnent-ils une suite qui finit par « stagner » ?
- Trouver le nombre initial qui permettait d'obtenir 1031223314 et 10213223.
- Si vous êtes en lycée : écrire un algorithme qui permette, à partir d'un nombre *n* quelconque, d'écrire la liste des nombres obtenus.

Eléments de solution

Avec **30** au départ, on obtient 1031223314 : en effet, la suite « 30 » donne successivement 1013 ; 102113 ; 10311213 ; 10411213 ; 1031221314 ; **1031223314**... Quant à **10213223**, ce serait (d'après une source internet[1]) le seul nombre (mis à part 22) qui ne serait obtenu qu'à partir de lui-même ; mais nous n'en n'avons trouvé aucune démonstration.

Il est évident qu'on ne peut pas partir en « marche arrière » pour trouver le nombre initial, puisque des nombres différents au départ : par exemple 123 et 312(c'est évident car ils ont les mêmes chiffres), mais aussi 1 et 23) peuvent aboutir au même nombre final. On rencontre également des « paquets » : 11, 12, 13 et 14 donnent tous les quatre 21322314 et 31, 32, 33 et 34 donnent aussi tous les quatre 21322314.

On pourrait croire que, quel que soit le nombre de départ, la suite devient constante à partir d'un certain rang. Mais ce n'est pas toujours le cas (ça l'était cependant pour les deux exemples de l'énoncé). Si, par exemple, on part de n=40, on obtient successivement : 1014, 102114, 10311214, 1041121314, 1051121324, 104122131415, 105122132415, 104132131425, 104122232415, 103142132415, **104122232415, 103142132415**... ; on constate que, à partir d'un certain rang, la suite « oscille » alternativement entre ces deux dernières valeurs. Si on part de n=50, la suite « boucle » sur trois valeurs : **10414213142516, 10512213341516, 10512223142516**...

Il a cependant été **démontré** (voir sitographie ci-dessous) que seuls trois cas peuvent se produire : soit la suite stagne à partir d'un certain rang, soit elle oscille entre deux valeurs, soit elle oscille entre trois valeurs.

A la page suivante, un algorithme permettant de claculer la suite de tous les nombre obtenus à partir d'un nombre *n* quelconque donné.

Sitographie

Suite A036058 : https://oeis.org/A036058 et https://oeis.org/A036058/b036058.txt

Suite de Robinson : https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Robinson ([2])

.../...

1 http://www.bookcrossing.com/forum/5/436539

2 Attention, la suite proposée ici n'est pas la même que celle du défi : nous avons choisi, dans le défi, de compter les chiffres dans l'ordre 1, 2, … 9, alors que Robinson les compte dans l'ordre de leur apparition dans le nombre. Par exemple 1323 donne pour ce défi 11 12 23 alors que pour Robinson c'est 11 13 12 13.

retour au sommaire

Exemple d'algorithme (auteur : Gilles Waehren)

Entrée : n : entier *(le nombre de départ)*
Sortie : p : chaine *(la chaine fabriquée)*
Déclarations : tabRésultat : tableau de chaînes *(tableau qui contient les résultats successifs)*
Début
    Saisir n
    p ← conversionChaine(n)
    tabRésultat ← [] *(tableau vide)*
    Tant que p n'est pas dans tabResultat **faire :**
        p ← Hardy(p)
        ajouter p à tabRésultat
        Afficher p
    finTantque
Fin

Fonction Hardy(n:chaine)
    Déclaration : tab: tableau de caractères
    Sortie : résultat : chaine *(retour de la fonction Hardy)*
    Début
        tab ← conversionTableau(n)
        resultat ← ""
        Pour i **allant de** 0 **à** 9 **faire :**
            nb ← compte(i,tab) *(nombre d'apparitions du chiffre i dans tab)*
            si nb ≠ 0 **alors :**
                resultat ← resultat+conversionChaine(nb)+conversionChaine(i)
                (construction de la nouvelle chaine)
            finSi
        finPour
        retourner resultat
    Fin

Fonction conversionTableau(n:chaine)
Sortie : tab : tableau de caractères *(tableau des chiffres de la chaine n)*
    Début
        tab ← [] *(tableau vide)*
        Pour i **allant de** 1 **à** taille(tab) **faire** :
            ajouter n[i] à tab
        finPour
        retourner tab
    Fin

Remarques

Une première version de l'algorithme a été produite. Mais, dans le cas d'une « boucle » (comme avec n=40 ou n=50 par exemple), le programme ne s'arrêtait pas et ne fournissait aucun résultat.

Pour pallier cet inconvénient, dans une seconde version, le nombre d'itérations autorisées a été limité (par exemple à 1000). Le programme s'arrêtait quand ce nombre d'itérations était atteint (annonçant une « boucle suspectée ») et donnait un résultat ; dans ce cas, il fallait poursuivre « à la main » à partir du résultat affiché par le programme.

Un troisième solution (celle qui figure ci-dessus) a été écrite pour pallier cet inconvénient : garder en mémoire (dans un tableau) tous les résultats intermédiaires calculés et arrêter le programme dès que le dernier résultat calculé figure déjà dans ce tableau. Il suffit alors de regarder les trois derniers nombres de cette liste pour savoir si la suite stagne, si elle boucle sur deux éléments ou si elle boucle sur trois éléments.

Ces trois algorithmes et les trois programmes EduPython correspondant peuvent être demandés à jacverdier@orange.fr ou à president@apmeplorraine.fr

retour au sommaire