

**ÉTUDE MATHÉMATIQUE****LES JEUX À STRATÉGIE GAGNANTE (SECONDE PARTIE)**

Par Alain SATABIN,  
Lycée Gaspard Monge, Charleville

N.d.l.r. Cet article est la suite de celui que nous avons publié dans le Petit Vert n°126 de juin 2016.

Voici les chapitres qui ont déjà été étudiés.

1. De quoi parle-t-on ? (Un premier exemple sans prétention ; la situation générale ; la situation est graphe ! ; un deuxième exemple plus prétentieux ; un exemple encore plus prétentieux ; la fin des entremets).
2. Le théorème de Sprague-Grundy (Notations ; quelques propriétés intéressantes ; noyau et niveau ; la fonction de Grundy ; une reprise du jeu « pas plus de trois » ; une reprise du jeu « poussé à bout » ; le théorème).
3. Le jeu de Marienbad ou jeu de Nim (La règle du jeu ; notations ; la fonction de Grundy de ce jeu ; la stratégie du jeu de Marienbad ; étude d'une variante ; un retour au « poussé à bout »).

**4. LE JEU DES DEUX TAS D'OR OU JEU DE WITHOFF****4.1. LA RÈGLE DU JEU**

Deux tas de jetons sont disposés devant les joueurs. Un joueur, à son tour, prend autant de jetons qu'il le veut dans un des deux tas, ou bien enlève un nombre égal de jetons dans chaque tas. Le premier ne pouvant plus jouer a perdu.

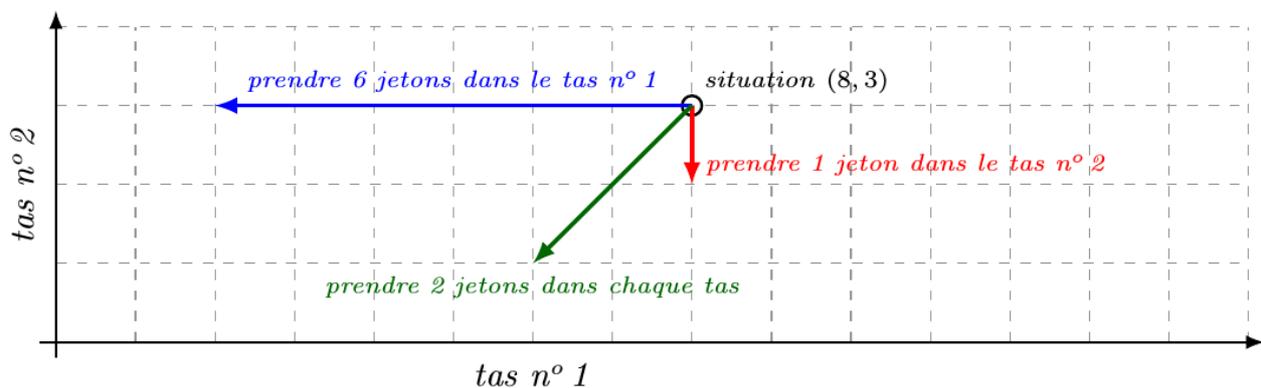
Ce jeu respecte bien les hypothèses requises mais, dans l'incapacité de trouver des ensembles permettant d'utiliser le théorème de Grundy, la mise en place d'une stratégie s'est avérée plus délicate !

**4.2. UNE PREMIÈRE APPROCHE GRAPHIQUE**

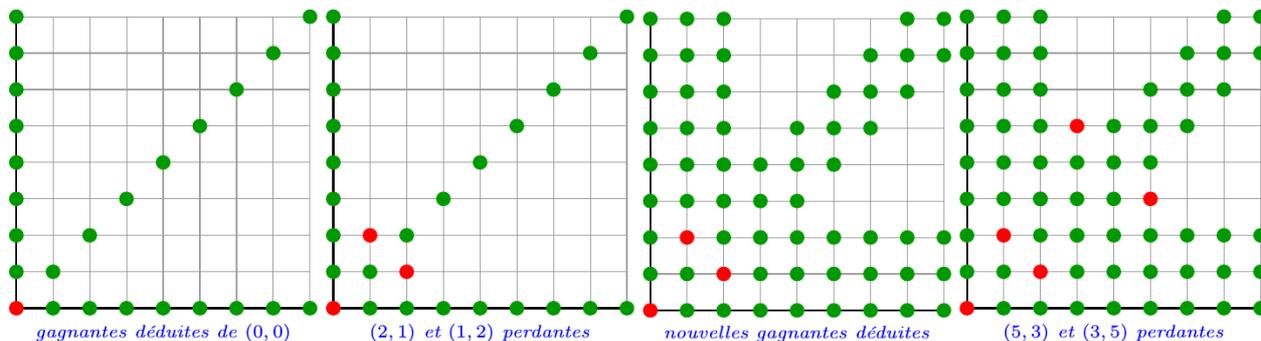
Une situation de jeu peut se représenter simplement par un couple d'entiers  $(x,y)$  comptabilisant le nombre de jetons de chaque tas.

Il est clair que seule la situation  $(0,0)$  empêche de jouer et désigne le perdant. Il est également évident que les situations  $(x,y)$  et  $(y,x)$  sont équivalentes et doivent posséder les mêmes propriétés.

Une situation du jeu peut être schématisée sur un réseau  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  où sont portés en abscisse le nombre de jetons du tas n°1 et en ordonnée celui du tas n°2. Un coup est alors un déplacement sur ce réseau : soit horizontal vers la gauche, soit vertical vers le bas, soit en diagonal descendant vers la gauche.



On peut alors visualiser de proche en proche les positions perdantes et les gagnantes. Le principe est que, partant d'une position perdante, les points situés au-dessus ou à droite ou sur la diagonale montant vers la droite sont des positions gagnantes puisque peuvent aboutir à la perdante en question en 1 coup. Une fois cela fait, la position de coordonnées minimales non encore coloriée est perdante car ses successeurs sont tous gagnants. On réitère le processus et ce crible fait apparaître les situations perdantes du jeu.



Tout cela est bien gentil mais risque d'être un peu long si le nombre de jetons est important... et peu discret si on doit sans cesse regarder la grille pour y lire quel coup porter pour être sûr de gagner !

### 4.3. UNE APPROCHE INFORMATIQUE

Nonobstant le fait que le théorème de Grundy ne nous aide pas, il n'en reste pas moins que la fonction de Grundy existe et qu'un algorithme judicieux peut nous donner les situations perdantes dans une limite fixée.

L'algorithme qui suit nous fournit les couples perdants pour un nombre de jetons inférieur ou égal à  $N$  dans chaque tas.

```

                                jeu des deux tas d'or - recherche des positions perdantes

DEBUT
N ← saisie("Nombre total maximal de jetons par tas : ") # limite fixée
nG ← tableau N × N de "0" # initialisation du tableau des nombres de Grundy à 0
pour x allant de 0 à N # nombre de jetons du premier tas
  pour y allant de 0 à N # nombre de jetons du second tas
    nGsucc ← {} # initialisation de la liste des nombres de Grundy des successeurs
    pour i allant de 1 à x # les cas où on prend i jetons dans le premier tas
      si nG[x-i][y] ∉ nGsucc # si la valeur du nG de ce successeur n'est pas encore dans la liste
        nGsucc ← nGsucc ∪ {nG[x-i][y]} # alors on l'ajoute à la liste
      fin si
    i suivant
    pour j allant de 1 à y # les cas où on prend j jetons dans le second tas
      si nG[x][y-j] ∉ nGsucc # si la valeur du nG de ce successeur n'est pas encore dans la liste
        nGsucc ← nGsucc ∪ {nG[x][y-j]} # alors on l'ajoute à la liste
      fin si
    j suivant
    pour k allant de 1 à min(x,y) # les cas où on prend k jetons dans chaque tas
      si nG[x-k][y-k] ∉ nGsucc # si la valeur du nG de ce successeur n'est pas encore dans la liste
        nGsucc ← nGsucc ∪ {nG[x-k][y-k]} # alors on l'ajoute à la liste
      fin si
    k suivant
    # calcul du nombre de Grundy de la situation (x,y)
    p ← 0
    tant que p ∈ nGsucc # on va incrémenter p tant qu'il est dans la liste
      p ← p+1
    fin tant que # en sortie p contient le plus petit entier non atteint pas les successeurs
    nG[x][y] ← p
  y suivant
x suivant
# affichage des situations perdantes avec x < y
pour y allant de 0 à n
  pour x allant de 0 à y
    si nG[x][y]=0 # si la situation est perdante
      afficher("(" , x , " , " , y , ")") # l'afficher
    fin si
  x suivant
y suivant
FIN

```

Ce programme, pour un nombre total de jetons n'excédant pas 100, donne les couples perdants suivants : (0,0) ; (1,2) ; (3,5) ; (4,7) ; (6,10) ; (8,13) ; (9,15) ; (11,8) ; (12,20) ; (14,23) ; (16,26) ; (17,28) ; (19,31) ; (21,34) ; (22,36) ; (24,39) ; (25,41) ; (27,44) ; (29,47) ; (30,49) ; (32,52) ; (33,54) ; (35,57) ; (37,60) ; (38,62) et tous leurs symétriques par rapport à la première bissectrice.

#### 4.4. À LA RECHERCHE D'UNE RÉGULARITÉ

Le programme précédent calcule en fait les  $nG$  (nombres de Grundy, voir première partie, §2,6) de toutes les positions du carré  $N \times N$  et il peut les afficher. Cela dit, on ne repère pas de régularité évidente sur ces nombres.

Par contre, les situations perdantes affichées ci-dessus,  $\{(x; y) \in S_0, 0 \leq x \leq y \leq 100\}$ , présentent quelques propriétés exploitables. Telles qu'elles sont rangées, selon les abscisses croissantes, notons  $z_n = (x_n; y_n)$  le  $n$ -ième couple de cette liste.

Il semblerait que  $y_n = x_n + n$ . Cela n'est pas vraiment étonnant si on considère le procédé graphique exposé au §[4.2]. En effet, puisqu'on raye à chaque fois la diagonale  $y = x+k$  issue du nouveau sommet perdant identifié, le perdant suivant se trouvera sur la diagonale suivante  $y = x+k+1$ .

Repérer une régularité sur les abscisses est plus délicat. Une régression linéaire sur les 25 couples du paragraphe précédent donne l'équation  $y \approx 1,62x + 0,26$  avec un excellent coefficient de 0,99995.

En réitérant la chose avec les positions perdantes dans le carré  $200 \times 200$  (toujours au-dessus de la première bissectrice) on trouve cette fois  $y \approx 1,61802x + 0,29832$  et un coefficient de corrélation égal à 0,99999.

La pente de la droite attire l'attention : c'est, à  $10^{-5}$  près, la valeur du nombre d'or,  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , solution positive de l'équation  $X^2 - X - 1 = 0$ . Posons par ailleurs  $\beta = 0,29832$ .

En admettant que les situations  $z_n$  sont sur cette droite, on a  $x_n + n \approx \phi x_n + \beta$ .

Cela conduit à  $x_n \approx \phi(n - \beta) \approx n\phi - 0,48$  et donc  $n\phi - 1 < x_n \leq n\phi$ .

On peut donc conjecturer que les positions perdantes situées au-dessus de la première bissectrice sont :

$$\{(x; y) \in S_0, 0 \leq x \leq y\} = \{(E(n\phi); E(n\phi) + n), n \in \mathbb{N}\}$$

$S_0$  serait alors constitué de ces points et de leurs symétriques par rapport à la première bissectrice.

Une fois démontré, cela permettrait de lister les situations perdantes plus rapidement qu'en calculant les  $nG$  de proche en proche et la cerise sur le gâteau serait de pouvoir déterminer rapidement le coup à jouer pour amener l'adversaire à une situation perdante, c'est à dire de mettre en œuvre une stratégie.

#### 4.5. QUELQUES PROPRIÉTÉS UTILES DE LA PARTIE ENTIÈRE

Les points suivants sont des classiques et les démonstrations restent basiques :

- Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E(x)$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$  (définition).
- La partie entière est une fonction croissante (au sens large).
- $E(x) \leq x < E(x)+1$  et  $x - 1 < E(x) \leq x$ .
- $E(x)$  est aussi le plus petit entier strictement supérieur à  $x - 1$ .
- $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$ .
- $E(x+y) = x + E(y) \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

##### Propriété 4.5.i

Si  $x > 1$  est un nombre irrationnel, alors l'application  $n \in \mathbb{N}^* \rightarrow E(nx)$  est injective.

démonstration

Si  $E(nx) = E(px)$ , on a alors (inégalités strictes car  $x \notin \mathbb{Q}$ ):

$$px - 1 < E(px) = E(nx) < nx \Rightarrow p - n < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow p - n \leq 0 \Rightarrow p \leq n$$

et la situation étant symétrique, on démontre de même que  $n \leq p$ , ce qui prouve que  $n = p$ .

#### 4.6. LE THÉORÈME DE BEATTY

##### Théorème 4.6.i

Soient deux nombres irrationnels strictement positifs  $x$  et  $y$  tels que  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ .

Les ensembles  $B_x = \{E(nx), n \in \mathbb{N}^*\}$  et  $B_y = \{E(ny), n \in \mathbb{N}^*\}$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

*Démonstration*

Remarquons que les hypothèses sur  $x$  et  $y$  donnent  $x > 1$ ,  $y > 1$  et  $x \neq y$ .

Supposons que  $k$  appartienne à  $B_x \cap B_y$ , c'est à dire  $k = E(nx) = E(py)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

On a alors (inégalités strictes car  $x$  et  $y$  sont irrationnels) :

$$\begin{cases} nx-1 < k < nx \\ py-1 < k < py \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} nxy-y < ky < nxy \\ pxy-x < kx < pxy \end{cases} \Rightarrow (n+p)xy - (x+y) < k(x+y) < (n+p)xy$$

En remarquant que  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$  signifie aussi  $x+y = xy$ , on a donc  $n+p-1 < k < n+p$ , ce qui est féroce impossible puisqu'un entier  $k$  ne peut être strictement compris entre deux entiers consécutifs, et donc  $B_x \cap B_y = \emptyset$ .

Soit maintenant  $k \in \mathbb{N}^*$  et supposons que  $k \notin B_x$ .

$k$  est encadré par deux multiples consécutifs de  $x$  :  $px < k < (p+1)x$  avec  $p \in \mathbb{N}$  ;

comme  $k \neq E((p+1)x)$ , on a  $k+1 \leq E((p+1)x) < (p+1)x$  et donc  $k+1 < (p+1)x$ .

Finalement, cela donne  $px < k < px + x - 1$ .

Si on suppose que  $k$  n'appartient pas non plus à  $B_y$ , on obtient un résultat analogue et on a :

$$\begin{cases} px < k < px + x - 1 \\ qy < k < qy + y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pxy < ky < pxy + xy - y \\ qxy < kx < qxy + xy - x \end{cases} \Rightarrow (p+q)xy < k(x+y) < (p+q+2)xy - (x+y)$$

ce qui conduit, comme précédemment, à  $p+q < k < p+q+1$ , ce qui est impossible.

Donc si  $x \notin B_x$  alors  $x \in B_y$ , ce qui prouve que  $B_x \cup B_y = \mathbb{N}^*$

Le théorème est ainsi démontré.

**4.7. REVENONS À NOS MOUTONS***Remarques*

- Le nombre d'or  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  solution de  $X^2 - X - 1 = 0$  est irrationnel
- $\phi^2 = \phi + 1$  est également irrationnel.
- $x = \phi$  et  $y = \phi^2$  vérifient  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ .
- $B_\phi$  et  $B_{\phi^2}$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$  (théorème [4.6.i]).
- $E(n\phi) + n = E(n\phi + n) = E(n(\phi + 1)) = E(n\phi^2)$ .

Notons  $\Pi_1 = \{(E(n\phi); E(n\phi^2)), n \in \mathbb{N}^*\}$  et  $\Pi_2 = \{(E(n\phi^2); E(n\phi)), n \in \mathbb{N}^*\}$

et  $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{(0; 0)\}$ ,  $\Pi^* = \Pi_1 \cup \Pi_2$ ,  $\Pi^c$  le complémentaire de  $\Pi$  dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

L'ensemble  $\Pi_1$  est situé au-dessus de la première bissectrice, l'ensemble  $\Pi_2$  en dessous, et ces deux ensembles sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

**4.8. LE CRUEL DESTIN DES SITUATIONS DE  $\Pi^*$** *Propriété 4.8.i*

Sur le réseau  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , chaque droite verticale, horizontale, ou parallèle à la première bissectrice contient un point et un seul appartenant à  $\Pi$

*Démonstration*

Éliminons tout de suite les axes et la première bissectrice dont il est évident qu'elles contiennent comme unique point de  $\Pi$  le point (0,0).

Pour une droite de type  $X = x$  avec  $x > 0$  :

- soit  $x \in B_\phi$ ,  $x \notin B_{\phi^2}$ , donc  $\exists ! n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x = E(n\phi)$  (l'unicité vient de [4.5.i])  
et la droite  $X = x$  contient uniquement le point de  $\Pi_1$  :  $(E(n\phi); E(n\phi^2))$

- soit  $x \in \mathbb{B}_\phi^2$ ,  $x \notin \mathbb{B}_\phi$  donc  $\exists ! n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x = E(n\phi^2)$  (l'unicité vient de [4.5.i])  
et la droite  $X = x$  contient uniquement le point de  $\Pi_2$  :  $(E(n\phi^2); E(n\phi))$

La démonstration est analogue avec une droite horizontale  $Y = y > 0$ .

Par ailleurs, on remarquera que :

- un point  $(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  avec  $0 < x < y$  est dans  $\Pi_1$  si et seulement si 
$$\begin{cases} x = E(n\phi) \\ y = E(n\phi^2) \\ n = y - x \end{cases}$$
- un point  $(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  avec  $0 < y < x$  est dans  $\Pi_2$  si et seulement si 
$$\begin{cases} x = E(n\phi^2) \\ y = E(n\phi) \\ n = x - y \end{cases}$$

Cela découle directement des définitions des ensembles et de la dernière remarque du paragraphe précédent.

Ce qui veut dire qu'une droite du type  $Y = X + k$ , par exemple avec  $k > 0$ , ne peut contenir qu'un point de  $\Pi$ , qui est dans  $\Pi_1$ , et qui est  $(E(k\phi); E(k\phi^2))$ .

Le même raisonnement avec  $k < 0$  donne un point dans  $\Pi_2$ .

### Conséquences

Si un joueur se trouve devant une situation de  $\Pi$  sur laquelle il peut encore jouer (donc de  $\Pi^*$ ), il va déplacer la position suivant une horizontale, une verticale, ou une diagonale du réseau (voir §[4.2]). Il ne peut donc pas retomber sur une situation de  $\Pi$  d'après [4.8.i].

Nous venons d'établir qu'une situation de  $\Pi^*$  ne peut conduire en un coup qu'à une situation de  $\Pi^c$

### 4.9. L'AVENIR RADIEUX DES SITUATIONS DE $\Pi^c$

Éliminons de suite les situations  $(x; 0)$ ,  $x > 0$ ,  $(0; y)$ ,  $y > 0$  et  $(x, x)$ ,  $x > 0$  pour lesquelles le coup à jouer est évident afin d'obtenir directement  $(0, 0)$  et gagner.

Baptisons les tas de telle façon que le tas n°2 contienne plus de pièces que le tas n°1.

Nous avons donc la situation  $(x; y) \in \Pi^c$  telle que  $0 < x < y$ , au-dessus de la première bissectrice.

Posons  $n = y - x \in \mathbb{N}^*$ .

- $x = E(n\phi)$  est impossible car alors on aurait  $y = x + n = E(n\phi) + n = E(n\phi^2)$  et on serait dans  $\Pi_1$  ;

- si  $x > E(n\phi)$ , prenons  $k = x - E(n\phi)$  dans chaque tas,

nous obtenons la situation  $(E(n\phi); E(n\phi) + y - x) = (E(n\phi); E(n\phi) + n) = (E(n\phi); E(n\phi^2)) \in \Pi_1$  ;

- si  $x < E(n\phi)$ , remarquons qu'alors  $y = x + n < E(n\phi) + n = E(n\phi^2)$ .

- soit  $x \in \mathbb{B}_\phi$ ,  $x \notin \mathbb{B}_\phi^2$ , donc  $\exists ! p \in \mathbb{N}^*$ ,  $x = E(p\phi)$

$$x = E(p\phi) < E(n\phi) \text{ induit que } p < n \text{ et } E(p\phi^2) = E(p\phi) + p = x + p < x + n = y ;$$

en prenant  $y - E(p\phi^2)$  dans le tas n°2, on obtient  $(E(p\phi); E(p\phi^2))$  qui est dans  $\Pi_1$

- soit  $x \in \mathbb{B}_\phi^2$ ,  $x \notin \mathbb{B}_\phi$ , donc  $\exists ! p \in \mathbb{N}^*$ ,  $x = E(p\phi^2)$

on a alors  $y > x = E(p\phi^2) = E(p\phi) + p > E(p\phi)$

en prenant  $y - E(p\phi)$  dans le tas n°2, on obtient  $(E(p\phi^2); E(p\phi))$  qui est dans  $\Pi_2$ .

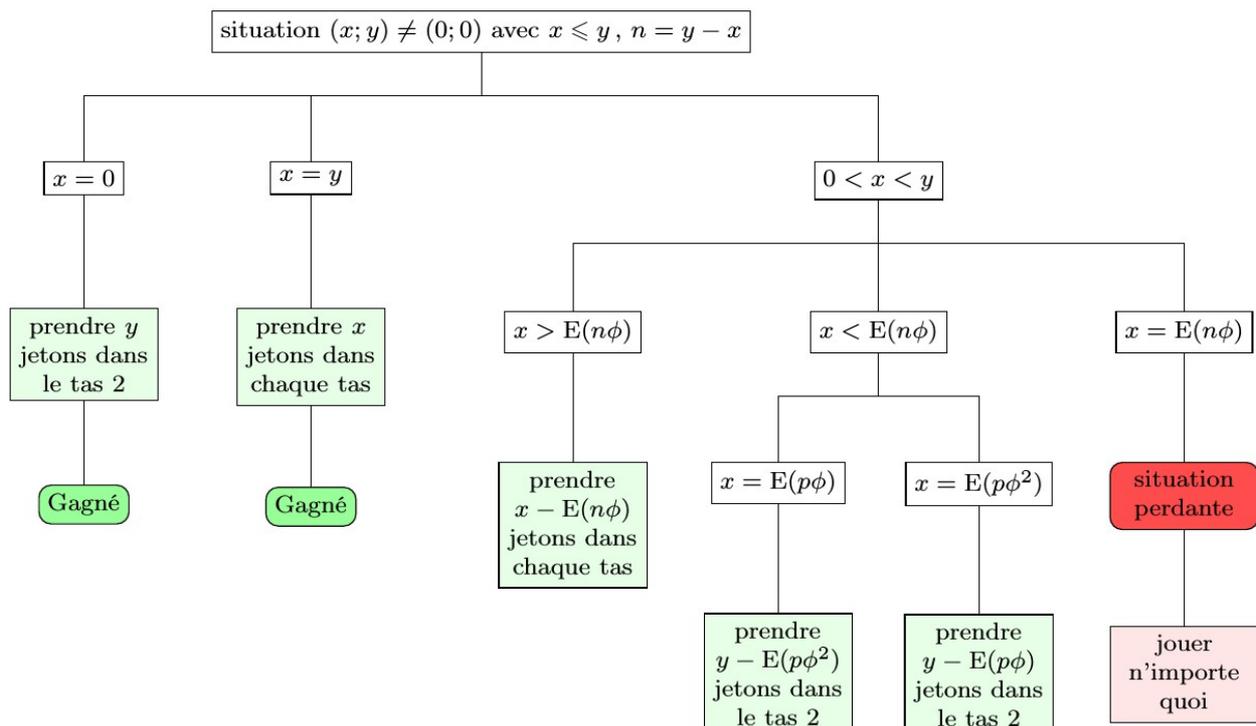
**Conséquences** : Nous venons d'établir qu'une situation de  $\Pi^c$  peut toujours conduire en un coup à une situation de  $\Pi$ .

**4.10. UN PETIT BILAN S'IMPOSE !**

Nous venons d'établir que tout coup appliqué à situation de  $\Pi^*$  conduit toujours à une situation de  $\Pi^c$  et que lorsqu'on est devant une situation de  $\Pi^c$ , il y a toujours moyen, en un coup, de laisser une situation de  $\Pi$ .

Cela établit que  $\Pi$  est bien exactement l'ensemble des situations perdantes.

La stratégie à suivre pour amener progressivement l'adversaire à (0;0), démontrée au paragraphe précédent, se résume comme suit (le tas n°1 est celui qui contient le moins de jetons) :



Difficile à appliquer mentalement ! Cela dit, il serait étonnant que l'adversaire devine la stratégie par simple observation, même sur un grand nombre de parties.

Par contre, un petit algorithme est tout à fait adapté au traitement de la chose.

Pour trouver l'entier  $p$  dans le cas  $x < E(n\phi)$ , la remarque suivante peut aider :

$$x = E(p\phi) \Leftrightarrow x < p\phi < x + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\phi} < p < \frac{x+1}{\phi} \Leftrightarrow ]\frac{x}{\phi}; \frac{x+1}{\phi}[ \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \Leftrightarrow E(\frac{x}{\phi}) \neq E(\frac{x+1}{\phi})$$

et si cette condition est vérifiée, alors  $x = E(p\phi)$  avec  $p = E(\frac{x+1}{\phi})$ ,

sinon on a  $x = E(p\phi^2)$  avec  $p = E(\frac{x+1}{\phi^2})$ .

**5. POUR DEVENIR CÉLÈBRE ... OU PAS !**

L'analyse de ces jeux par une méthode informatique ne pose en général pas de problème, bien que les graphes montent rapidement en complexité.

Un algorithme peut ordonner le graphe en partant des situations perdantes finales et calculer les  $nG$  des situations de façon récursive ; puis, à partir d'une situation donnée, analyser tous les successeurs pour en trouver un de  $nG$  nul et ainsi déterminer le coup à jouer.

Par contre, la régularité chez les situations perdantes ne saute pas toujours aux yeux et elle est indispensable à l'élaboration d'une stratégie permettant de calculer directement le coup à jouer sur une position gagnante.

Pour finir, voici trois exemples de jeu à stratégie gagnante pour lesquels, à ma connaissance, la caractérisation des positions perdantes n'a toujours pas été établie malgré des analyses informatiques à des degrés élevés. Si vous voulez vous y essayer...

### 5.1. LE JEU DE GRUNDY

On dispose sur la table un tas d'allumettes. Chaque joueur doit, à son tour, partager un des tas d'allumettes présent sur la table en deux tas inégaux. Le premier qui ne peut plus jouer a perdu.

Il est clair que les tas de 1 ou 2 allumettes ne permettent plus de jouer.

Le théorème de Grundy [2.7.i] s'adapte parfaitement à ce jeu puisque, par exemple, la situation comportant un tas de 7 et un tas de 12 est la *somme* d'un jeu de Grundy avec un tas de 5 et d'un jeu de Grundy avec un tas de 12. Le  $nG$  de la situation  $\{7;12\}$  est donc la *nim-addition* des  $nG$  de  $\{7\}$  et  $\{12\}$ .

Si  $g$  est la fonction de Grundy,  $g(\{1\}) = g(\{2\}) = 0$ , et  $\{3\}$  ayant comme seul successeur  $\{1;2\}$ ,  $g(\{3\}) = 1$ .

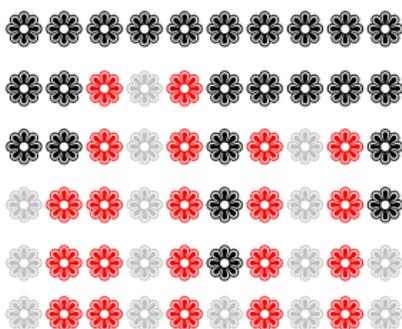
La situation  $\{4\}$  a comme unique successeur  $\{1;3\}$  et  $g(\{1;3\}) = g(\{1\}) \oplus g(\{3\}) = 0 \oplus 1 = 1$ , donc  $g(\{4\}) = 0$ . C'est une situation perdante.

$\{5\}$  a pour successeurs  $\{1;4\}$  et  $\{2;3\}$  dont les  $nG$  sont  $0 \oplus 0 = 0$  et  $0 \oplus 1 = 1$ , donc  $g(\{5\}) = 2$ .

Et ainsi de suite !

Aucune régularité des positions perdantes n'a été identifiée pour l'instant.

### 5.2. LE JEU DES FLEURS



Un parterre est constitué d'une rangée de fleurs (au moins deux). Chaque joueur doit, à son tour, cueillir une fleur qui ne soit pas voisine d'une fleur déjà coupée. Le premier qui ne peut plus jouer a perdu.

Voici un exemple de partie dans laquelle le premier joueur gagne. Pour chaque coup joué, la fleur coupée devient grise et celles qui deviennent rouges ne peuvent plus être coupées.

Une situation de jeu peut être représentée par les paquets dans lesquels il est encore possible de cueillir une fleur.

La partie ci-contre peut ainsi se résumer à la séquence :  
 $\{10\} \rightarrow \{2;5\} \rightarrow \{2;1;1\} \rightarrow \{1;1\} \rightarrow \{1\} \rightarrow \{0\}$ .

Là encore, le théorème de Grundy s'applique puisque, par exemple, la configuration  $\{2;5\}$  est la *somme* du jeu des fleurs avec une rangée de 2 et d'un autre avec une rangée de 5.

Analysons d'un peu plus près cette partie.

La seule configuration perdante finale est évidemment  $\{0\}$ , donc de  $nG$  nul. Il en découle, comme  $\{1\}$  et  $\{2\}$  ont comme seul successeur  $\{0\}$ , que  $g(\{1\}) = g(\{2\}) = 1$ .

Cela donne  $g(\{1;1\}) = g(\{1\}) \oplus g(\{1\}) = 1 \oplus 1 = 0$  et  $g(\{2;1;1\}) = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$ .

La situation  $\{3\}$  a deux successeurs qui sont  $\{1\}$  et  $\{0\}$ , de  $nG$  1 et 0, donc  $g(\{3\}) = 2$ .

La situation  $\{5\}$  a trois successeurs qui sont  $\{3\}$ ,  $\{2\}$  et  $\{1;1\}$  dont les  $nG$  sont respectivement 2, 1 et 0, donc  $g(\{5\}) = 3$ , et on obtient  $g(\{2;5\}) = 1 \oplus 3 = 2$ , ce qui permet de voir que le premier joueur n'a pas appliqué de stratégie gagnante puisqu'au premier coup il a laissé à son adversaire une situation dont le  $nG$  n'est pas nul.

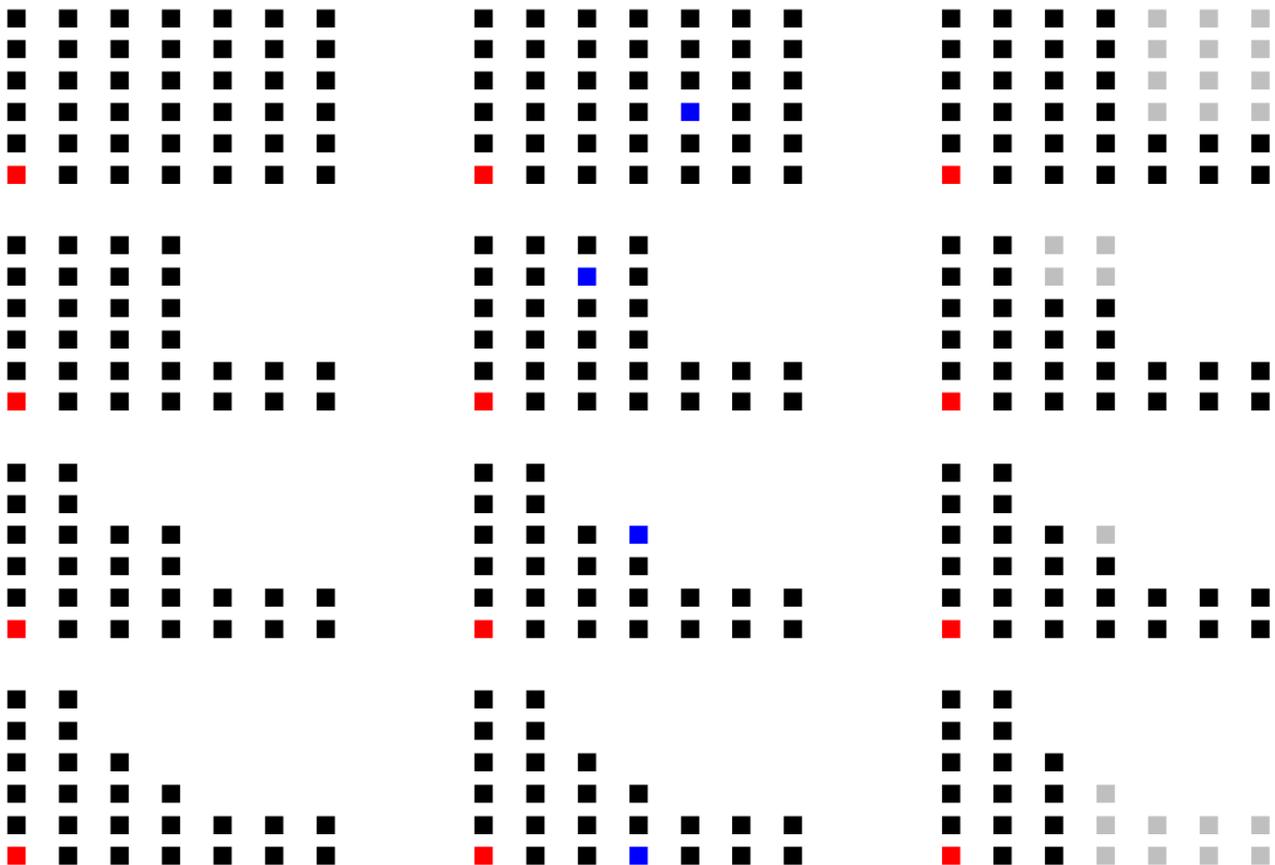
Heureusement que son adversaire ne connaissait pas la stratégie ! En poursuivant les calculs, on voit que le premier joueur aurait dû prendre la première ou la troisième fleur pour laisser une des situations  $\{8\}$  ou  $\{1;6\}$  dont le  $nG$  est nul.

Là encore, aucune logique n'a été repérée sur les positions perdantes.

### 5.3. LA TABLETTE DE CHOCOLAT EMPOISONNÉE OU *CHOMP*

Le jeu commence sur une tablette de chocolat dont le carré en bas à gauche est empoisonné. À son tour, un joueur doit choisir un carré non empoisonné de la tablette et "manger" tout ce qui est à droite et au-dessus de ce carré, lui compris. Le premier ne pouvant plus jouer a perdu (c'est comme si il était obligé de manger le dernier carré : celui empoisonné).

Sur les quelques coups représentés ci-dessous, le carré rouge est celui empoisonné, un carré bleu signale celui choisi par le joueur et les gris sont ceux qui sont "mangés". Chaque ligne détaille un coup joué et dans la colonne de gauche, on voit l'évolution du jeu coup après coup :



Pour l'heure, aucune stratégie, aucune régularité des situations perdantes n'a été établie et on voit mal comment décomposer le jeu en "sous-jeux" pour appliquer le théorème de Grundy.

Quelques situations spéciales s'étudient assez bien :

- sur les tablettes à 2 lignes, les positions perdantes sont celles où la ligne du dessus comporte une case de moins que celle du bas ;
- pour les situations en "L" ( $n$  lignes de "1" et une ligne de  $p$  en bas) les positions perdantes sont celles pour lesquelles  $n = p$  ;
- une tablette carrée est une situation gagnante.
- 

POUR LE RESTE, LE TRAVAIL RESTE À FAIRE.