ÉTUDE MATHÉMATIQUE

LES JEUX À STRATÉGIE GAGNANTE (PREMIÈRE PARTIE)

Par Alain SATABIN,
Lycée Monge de Charleville

1. DE QUOI PARLE-T-ON ?

1.1. Un exemple sans prétention

Deux joueurs jouent au « *pas de place pour tout le monde* ». Ce jeu se déroule sur un plateau en forme de disque et avec un tas de jetons eux aussi en forme de disque, tous identiques.
Au commencement, le plateau est vierge. Chacun à leur tour, les joueurs doivent déposer un jeton bien à plat sur le plateau, sans chevaucher un jeton déjà placé et sans déborder du plateau. Le premier ne pouvant plus jouer a perdu.
Imaginons que le premier joueur adopte la stratégie suivante : il pose le premier jeton au centre du plateau, puis aux tours suivants il pose son jeton en position symétrique (par rapport au centre du plateau) du jeton que son adversaire vient de placer.
Cette position symétrique du jeton qui vient d'être posé est bien libre puisque le premier joueur applique cette stratégie depuis le début. Par conséquent le premier joueur laisse toujours à son adversaire un plateau où l'ensemble des zones occupées est symétrique par rapport au centre ... et donc celui des zones libres aussi.
Ainsi, le premier joueur est assuré de toujours pouvoir jouer après son adversaire et, comme le nombre de coups est limité (au pire par le quotient entier de l'aire du plateau par l'aire d'un jeton), c'est le second joueur qui sera le bloqué et qui donc perdra.
Cette stratégie assure la victoire systématique du premier joueur, quoi que fasse son adversaire.
Ce jeu est *un jeu à stratégie gagnante* et dans ce cas la stratégie est pour le premier joueur.

1.2. La situation générale

Nous considérons dans ce document les jeux qui vérifient les 4 hypothèses (H) suivantes :
- (H-1) le jeu est à découvert et se joue à deux,
- (H-2) à son tour, un joueur est obligé de jouer,
- (H-3) le jeu possède un nombre fini de configurations possibles,
- (H-4) le jeu se termine en un nombre fini de coups par la défaite du joueur qui ne peut plus jouer.

Nous allons établir dans cette section que, sous ces hypothèses, il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs.
Remarque : l'exemple précédent ne respecte par *stricto sensu* ces 4 hypothèses à cause de (H-3), ce qui ne l'empêche pas d'être à stratégie gagnante. Il n'était là que pour expliquer ce terme, sans autre prétention !

1.3. La situation est graphe !

Le jeu peut être représenté par un graphe orienté G dans lequel les sommets sont les situations de jeu et où un arc représente un coup légal permettant de passer de la situation x à la situation y.
L'ensemble des sommets sera noté X et l'ensemble des arcs U.
Pour $x \in X$, on notera $\Gamma(x)$ l'ensemble des successeurs de x. Cela signifie que si x est la situation devant laquelle se trouve un joueur au moment de jouer, $\Gamma(x)$ représente l'ensemble des situations qu'il peut laisser à son adversaire.
X est fini (voir H-3) et une partie est un chemin de longueur finie (voir H-4) sur ce graphe, une succession d'arcs « appartenant » alternativement (voir H-2) à l'un des deux joueurs (voir H-1) jusqu'à aboutir à un sommet sans successeur. Le dernier arc de ce chemin désigne le gagnant (voir H-4). Le graphe G ne possède pas de circuit puisque cela donnerait naissance à des parties infinies (voir H-4).
Nous ne considérerons donc dans ce document que des graphes finis orientés sans circuit.

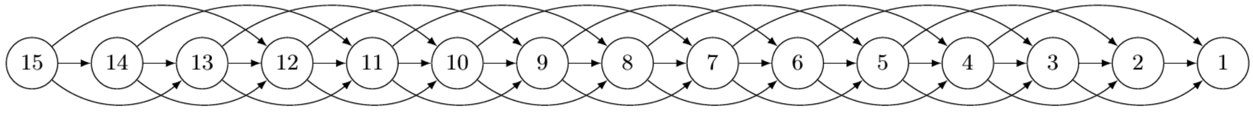
1.4. Un exemple plus prétentieux

Nous l'appellerons le « *pas plus de trois* »[1] et a été popularisé dans l'émission télévisée *Fort Boyard*.
Un tas d'allumettes est disposé devant les joueurs. Chacun leur tour ils doivent en prendre 1, 2 ou 3. Celui qui prend la dernière a perdu. Il est clair que ce jeu respecte les 4 hypothèses sus-mentionnées, pour peu qu'on ajoute

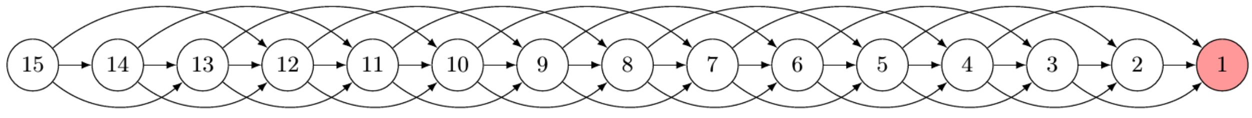
[1] Il est aussi parfois appelé le « jeu de la soustraction »

retour au sommaire

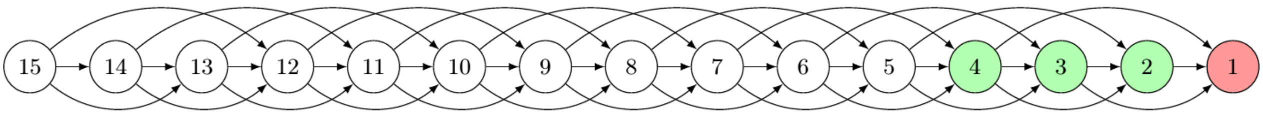
à la règle qu'il est interdit de vider le tas afin de respecter (H-4) : ainsi celui qui se retrouve devant 1 allumette ne peut pas jouer et a perdu.
Le graphe du jeu avec un tas de 15 allumettes au départ est le suivant :



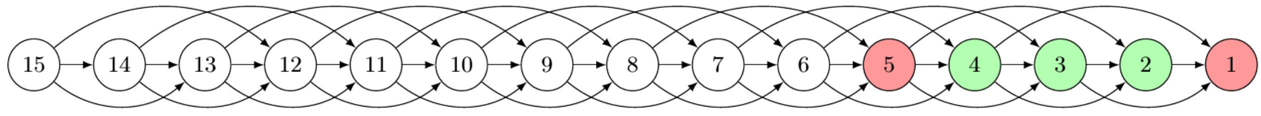
Analysons ce jeu en remontant la partie à partir de la fin. Le sommet (1) est perdant puisque le joueur se trouvant devant cette situation a perdu (il ne peut plus jouer puisque cela viderait le tas). Mettons-la en rouge :



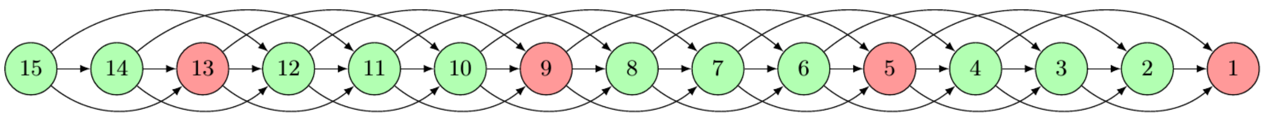
Tous les sommets prédécesseurs de (1) sont donc gagnants puisque un joueur se trouvant dans une telle situation gagne en amenant son adversaire en un coup légal à la situation perdante (1). Mettons-les en vert :



Le sommet (5) se trouve donc perdant car un joueur devant 5 allumettes n'a d'autre choix que de laisser 4, 3 ou 2 allumettes à son adversaire, c'est à dire une situation gagnante. Il passe au rouge :



Les raisonnements précédents se reproduisent de proche en proche : un sommet possédant un successeur perdant est un sommet gagnant ; et un sommet dont tous les successeurs sont gagnants est un sommet perdant :



Pour un départ de jeu à 15 allumettes, le premier joueur a donc une stratégie gagnante : laisser 13 allumettes à son adversaire au premier tour, puis 9 au troisième, puis 5 au cinquième et enfin 1 au septième.
Le jeu se partitionne en deux ensembles :

- les situations perdantes (la finale et celles dont tous les prédécesseurs sont gagnants)
- les situations gagnantes (celles qui possèdent au moins un successeur perdant)

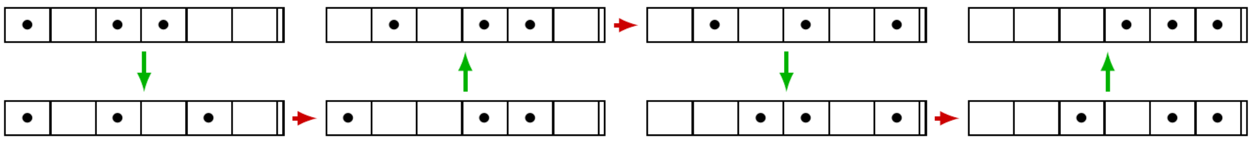
Mathématiquement, il est aisé de voir qu'ici les situations perdantes sont les entiers congrus à 1 modulo 4, c'est à dire $\mathsf{P} = \{4k+1 ; k \in \mathbb{N}\}$, et les gagnantes les autres.
Si au départ du jeu le nombre d'allumettes n'est pas congru à 1 modulo 4, le premier joueur a une stratégie gagnante : il doit laisser au premier coup un tel nombre (un multiple de 4, plus 1) à son adversaire et ensuite prendre systématiquement le complément à 4 de ce que vient de faire son adversaire. Ainsi, il le « baladera »de situations perdantes en situations perdantes, jusqu'à ne lui en laisser qu'une.
Évidemment, si en début de jeu le nombre d'allumettes est congru à 1 modulo 4, c'est le second joueur qui a une stratégie gagnante.

1.5. Un exemple encore plus prétentieux

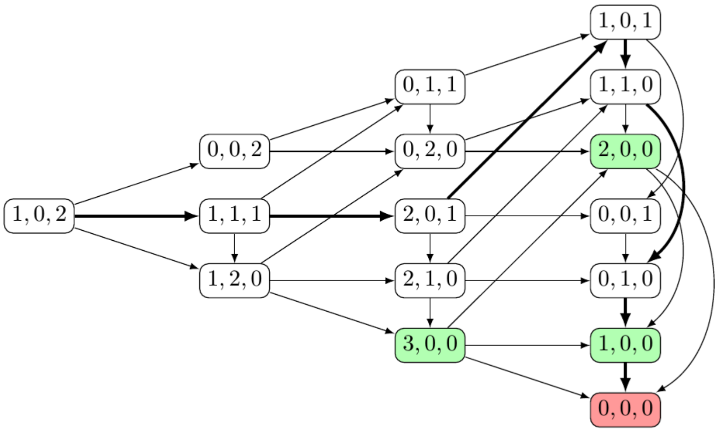
Appelons ce jeu le « *poussé à bout* » [2] . Trois pions sont disposés sur une ligne de cases et un coup consiste à pousser un pion vers la droite, du nombre de cases qu'il veut sans toutefois en chevaucher ni en dépasser un autre. Le premier qui ne peut plus jouer a perdu. Voici un exemple de partie où les flèches vertes signalent les coups du premier joueur et les rouges ceux de son adversaire :

[2] Connu aussi sous le nom de « jeu du Silver Dollar »

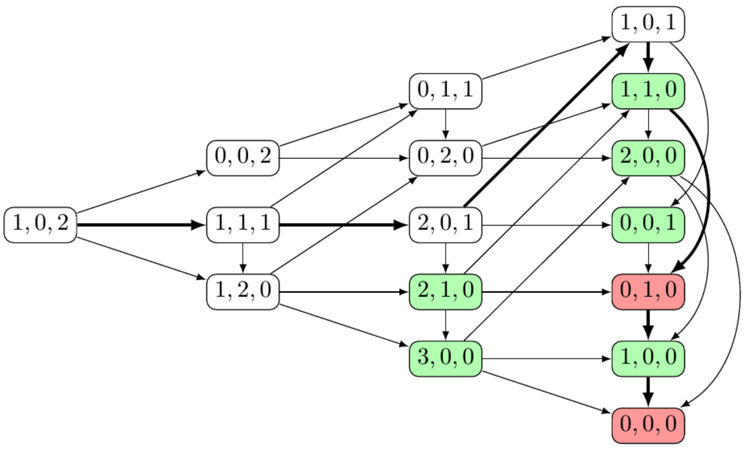
retour au sommaire



Sur cet exemple, le second joueur a perdu (la dernière flèche est verte).
Il apparait rapidement que le nombre de cases libres à gauche du pion de gauche n'a aucune importance et que seules entrent en ligne de compte les cases vides entre les pions et à droite du pion de droite. On convient alors de représenter une situation de jeu par un triplet indiquant le nombre de case(s) vide(s) entre le pion de gauche et celui du milieu, entre celui du milieu et celui de droite et à droite de celui de droite. Par exemple la position de départ est (1,0,2), la suivante (1,1,1), la suivante (2,0,1) ... et la dernière (0,0,0), situation perdante par excellence.
Un coup légal se traduit sur le triplet (*x,y,z*) par une des manœuvres suivantes : soit diminuer *x*, soit diminuer *y* et augmenter *x* d'autant, soit diminuer *z* et augmenter *y* d'autant.
Le graphe du jeu avec au départ (1,0,2) est déjà pas mal sophistiqué ! Il est représenté ci-dessous. Les arcs en gras correspondent à la partie jouée ci-dessus. Le coloriage est moins évident que dans l'exemple précédent et vaut d'être un peu détaillé. Le sommet final (0,0,0) est évidemment rouge et tous ses prédécesseurs sont gagnants, donc verts.

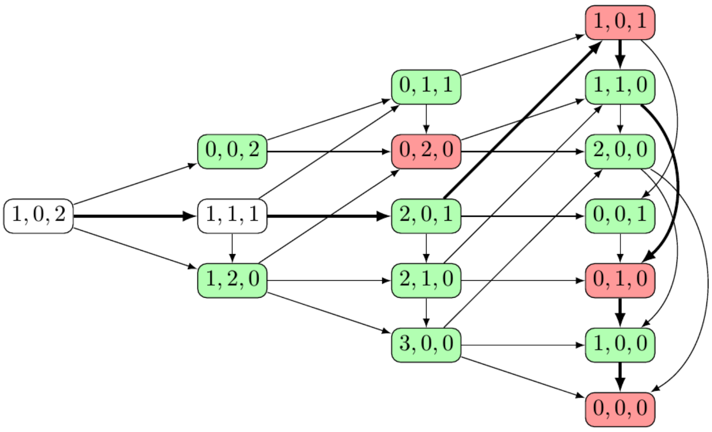


On voit ensuite que le sommet (0,1,0) n'a qu'un successeur, qui est gagnant, ce qui fait de lui un perdant et ses prédécesseurs sont gagnants :

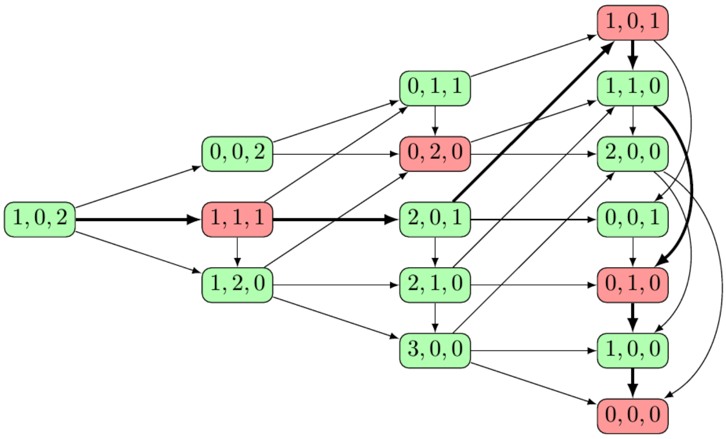


Cette fois deux sommets tombent en même temps dans le clan des perdants : le (1,0,1) et le (0,2,0) qui n'ont que des successeurs gagnants. Évidemment leurs prédécesseurs sont gagnants :

retour au sommaire



La fin est évidente : le (1,1,1) est perdant et le (1,0,2) gagnant :



Une particularité de cet exemple par rapport au précédent est que certaines situations gagnantes offrent plusieurs possibilités pour pousser l'adversaire sur une perdante. C'est le cas de (0,1,1) qui peut donner (0,2,0) ou (1,0,1). .

Sur cet exemple, il semble que les situations perdantes soient celles-dont les coordonnées extrêmes sont égales.
Démontrons que cela reste vrai dans le cas général.
Considérons ce jeu sur une ligne de cases de longueur *n*.
L'ensemble des sommets du graphe est $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3 \; ; \; 0\leq x\,,\,y\,,\,z\leq n-3\}$
La situation indiquant la fin de partie et le perdant est (0,0,0)

et les coups possibles sur (*x,y,z*) sont de 3 types : $\begin{cases}\Phi_1:(x,y,z)\to(x-k,y,z) & \text{avec } 1\leqslant k\leqslant x\\ \Phi_2:(x,y,z)\to(x,y-k,z) & \text{avec } 1\leqslant k\leqslant y\\ \Phi_3:(x,y,z)\to(x,y,z-k) & \text{avec } 1\leqslant k\leqslant z\end{cases}$

Notons $\Phi_{x,y,z}$ l'ensemble des coups possibles sur le triplet (*x,y,z*) et soit $\mathsf{P}=\{(x,y,z)\in X \; ; \; x=z\}$ et $G=X\setminus\mathsf{P}$.
On a bien $(0,0,0)\in P$.
On remarque que φ_1 et φ_2 modifient la première coordonnée du triplet et pas la troisième, tandis que φ_3 modifie la troisième et pas la première. Donc $(x,y,z)\in\mathsf{P}$, $\varphi\in\Phi_{x,y,z}\Rightarrow\varphi(x,y,z)\in G$.
Et si $(x,y,z)\in G$, deux cas sont possibles :

- si $x>z$, on applique φ_1 avec $k=x-z$ et on obtient (*z,y,z*).
- si $x<z$, on applique φ_3 avec k = $z-x$ et on obtient $(x,\, y+z-x,\, x)$.

On remarquera que dans le deuxième cas, si $z-x\leq z$, on peut aussi appliquer φ_2 avec $k=z-x$ pour obtenir $(x,\, y-z+x,\, x)$, mais ce coup n'est pas toujours possible.

En tout état de cause : $\begin{cases}(0,0,0)\in\mathsf{P}\\ \forall(x,y,z)\in\mathsf{P},\forall\Phi\in\Phi_{x,y,z},\Phi(x,y,z)\in\mathsf{G}\\ \forall(x,y,z)\in\mathsf{G},\exists\Phi\in\Phi_{x,y,z},\Phi(x,y,z)\in\mathsf{P}\end{cases}$

Cela suffit à prouver que P et *G* sont bien respectivement les ensembles des situations perdantes et gagnantes, et la stratégie gagnante est décrite par les deux items mentionnés dans la démonstration. Cette stratégie est évidemment pour le premier joueur si on commence sur une situation de G et pour le second si le départ est une situation de P .

retour au sommaire

1.6. La fin des entremets

Au travers de trois exemples, nous avons découvert une stratégie gagnante. Un matheux qui se respecte doit se poser la question de savoir si elle existe toujours !
Des mathématiciens célèbres (Von Neumann, Zermelo, Conway, Bouton, Ulam, Grundy) se sont penchés sur l'étude de ces jeux vérifiant les 4 hypothèses du §[1.2.]. Notamment, Bouton a entièrement résolu en 1901 le jeu que nous appellerons ici le « jeu de Marienbad » et qu'il avait baptisé *jeu de Nim* [3] . Ils ont établi que tout jeu de cette famille possède une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs, sans que, dans le cas général, la démonstration ne livre la stratégie en question (ah, ces matheux !).
Dans les années 1935 à 1939, Sprague et Grundy apportent la dernière pierre importante à l'édifice en créant une fonction associant à chaque situation de jeu un nombre, appelée *fonction de Grundy* dont la nullité est synonyme de « situation perdante » et en généralisant le travail de Bouton.
Passons aux choses sérieuses et intéressons-nous à cette démonstration . . .

2. LE THÉORÈME DE SPRAGUE-GRUNDY

2.1. Notations

$G = (X\,;\,U)$ est un graphe fini orienté sans circuit décrivant un jeu comme précédemment défini.
On rappelle que, pour $x \in X$, on note $\Gamma(x)$ l'ensemble des successeurs de x.
L'écriture des entiers en base deux sera notée entre crochets : [13 = 1101].
L'opérateur binaire « OU exclusif » sera noté $\oplus$: $0 \oplus 0 = 0$ $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ $1 \oplus 1 = 0$
Avec les notations usuelles de calcul booléen, on a : $a \oplus b = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$
On définit dans $\mathbb{N}$ la *nim-addition*, en faisant agir $\oplus$ bit à bit sur les nombres écrits en base 2 (il s'agit en fait d'une addition binaire sans retenue) : $13 \oplus 4 = [1\,1\,0\,1] \oplus [0\,1\,0\,0] = [1\,0\,0\,1] = 9$

2.2. Quelques propriétés intéressantes

Théorème 2.2.i : $(\mathbb{N}\,;\,\oplus)$ est un groupe abélien.

Démonstration
Il suffit de prouver les propriétés sur chaque bit de l'écriture en binaire.
La commutativité est une évidence avec l'écriture booléenne de la chose.
L'associativité est une conséquence des règles de calcul booléen :

$$a \oplus (b \oplus c) = a \cdot \overline{(b \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot c)} + \overline{a} \cdot (b \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot c) = a \cdot (\overline{b} + c) \cdot (b + \overline{c}) + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c = a \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c$$

ce qui est symétrique en *a, b, c* et prouve l'associativité puisque $\oplus$ est commutative.
Il est clair que 0 est élément neutre et comme $a \oplus a = 0$, chaque entier est son propre symétrique.
Établissons que dans une somme $\oplus$, on peut atteindre tout nombre inférieur au résultat en diminuant un seul terme de la somme.

Théorème 2.2.ii : soient $p, q_1, q_2, \cdots, q_n \in \mathbb{N}^{n+1}$ tels que $p < q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_n$,
$\exists i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\exists z \in \mathbb{N}, z < q_i$ tel que $p = q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_{i-1} \oplus z \oplus q_{i+1} \oplus \cdots \oplus q_n$

Démonstration
Commençons par $n = 2$ et prenons $p < x = q \oplus r$.
Quitte à ajouter des 0 inutiles à gauche de l'écriture binaire, formatons ces 4 entiers avec le même nombre de bits :

$$p = [p_k, \cdots, p_1, p_0] \quad q = [q_k, \cdots, q_1, q_0] \quad r = [r_k, \cdots, r_1, r_0] \quad x = [x_k, \cdots, x_1, x_0]$$

soit $\beta = \max\{i \in \mathbb{N}\,;\, 0 \le i \le k\,;\, p_i \ne x_i\}$; β existe puisque $p \ne x$ et $\forall\, i > \beta\,;\, p_i = x_i$.
De plus, comme $p < x$, on a $p_\beta = 0$ et $x_\beta = 1$; donc sur le bit de rang β on a : $q_\beta \oplus r_\beta = 1$.
Cela signifie que les bits q_β et r_β sont différents. Par commutativité, on peut supposer que $q_\beta = 1$ et que $r_\beta = 0$.

Posons : $\begin{cases} z_i & = & p_i \oplus r_i \quad \text{pour } i \in \{0, \ldots, \beta - 1\} \\ z_\beta & = & 0 \\ z_i & = & q_i \quad \text{pour } i \in \{\beta + 1, \ldots, k\} \end{cases}$

Comme $q_\beta = 1$ et que les bits plus élevés de z et q sont identiques, on a bien $z < q$.

[3] Dont certains disent que cela est tiré du radical allemand signifiant « prendre » ... et d'autres que c'est le verbe anglais « WIN » tourné de 180°

retour au sommaire

Par ailleurs : $\begin{cases} \text{pour } i<\beta & z_i \oplus r_i = p_i \oplus r_i \oplus r_i = p_i \oplus 0 = p_i \\ \text{pour } i=\beta & z_i \oplus r_i = 0 \oplus 0 = 0 = p_i \\ \text{pour } i>\beta & z_i \oplus r_i = q_i \oplus r_i = x_i = p_i \end{cases}$

Finalement on a $p = z \oplus r$ avec $z < q$, et le théorème est démontré pour $n = 2$.
Supposons le théorème démontré jusqu'à une somme de n - 1 entiers, avec $n \geq 3$
et considérons $p < q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_n = (q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_{n-1}) \oplus q_n$

Le cas $n = 2$ induit que :

- soit il existe $z < q_n$ tel que $p = (q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_{n-1}) \oplus z = q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_{n-1} \oplus z$
- soit il existe $y < q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_{n-1}$ tel que $p = y \oplus q_n$.

  Par hypothèse de récurrence, il existe alors $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ et $z < q_i$

  tels que $y = q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_{i-1} \oplus z \oplus q_{i+1} \oplus \cdots \oplus q_{n-1}$

  et en reportant on obtient $p = q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_{i-1} \oplus z \oplus q_{i+1} \oplus \cdots \oplus q_n$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque : la *nim-addition* nous servira plus loin dans la démonstration du dernier théorème. Posons-la dans un coin pour l'instant et revenons à la théorie des graphes.

2.3. Noyau et niveau

Définition 2.3.i : Une partie N de X est appelée *un noyau de G* si

$$\forall\, x \in N,\ \Gamma(x) \cap N = \varnothing \quad \text{et} \quad \forall\, x \notin N,\ \Gamma(x) \cap N \neq \varnothing$$

Remarque : par parler clairement, cela signifie que les éléments de N n'ont aucun successeur dans N, et que les éléments qui ne sont pas dans N ont au moins un successeur dans N. Au regard des exemples analysés précédemment, l'existence d'un tel ensemble fournit un ensemble de situations perdantes tandis que son complémentaire signale les positions gagnantes.

Définition et notations 2.3.ii
Pour $x \in X$, on note $C(x)$ l'ensemble des chemins d'origine x,
pour $c \in C(x)$ on note $\lambda(c)$ la longueur du chemin c, c'est à dire son nombre d'arcs,
pour $x \in X$ on note $\mu(x)$ le niveau de ce sommet défini par $\mu(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \Gamma(x) = \varnothing \\ \max\{\lambda(c); c \in C(x)\} \end{cases}$
et enfin on notera $S_n = \{x \in X ; \mu(x) = n\}$.

Remarque : le niveau d'un sommet est ici la longueur du plus long chemin partant de ce sommet. Notons que ce nombre est défini car le graphe considéré ne comporte pas de circuit et qu'en conséquence un chemin ne peut passer deux fois par le même sommet ; le nombre de sommets étant fini, le nombre de chemins l'est aussi. S_n est tout simplement l'ensemble des sommets de niveau n. Lorsque X est classé par niveaux, on dit que le graphe G est *ordonnancé*.

Propriété 2.3.iii : si N est un noyau de G, alors $S_0 \subset N$.
Démonstration : si $x \in S_0$, alors $\Gamma(x) \cap N = \varnothing \cap N = \varnothing$, donc $x \notin \bar{N}$ et donc $x \in N$.

Propriété 2.3.iv : pour $n \geq 1$, $\forall\, x \in S_n ;\ \Gamma(x) \subset S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup \cdots \cup S_0$ et $\Gamma(x) \cap S_{n-1} \neq \varnothing$.
Démonstration : on a ici $n \geq 1$.
Si $x \in S_n$ et $x' \in \Gamma(x)$ alors $\mu(x') < n$, car s'il existait un chemin de longueur au moins n partant de x', on pourrait fabriquer un chemin de longueur au moins n+1 partant de x en accolant l'arc (x,x'), ce qui contredirait l'hypothèse $x \in S_n$.
Cela prouve l'inclusion.
Par ailleurs, si $x \in S_n$ il existe un chemin de longueur n partant de x. Notons le $c = (x, y, ..., z)$ où le chemin $(y,..., z)$ est de longueur n - 1.

Nous avons donc $\mu(y)\geq n-1$ puisqu'il existe un chemin de longueur n - 1 partant de y et aussi $\mu(y)\leq n-1$ en vertu du fait que $y\in\Gamma(x)$ et de l'inclusion déjà démontrée, ce qui prouve que $\mu(y) = n - 1$ et donc que $\Gamma(x)\cap S_{n-1}\neq\emptyset$.

2.4. La fonction de Grundy

Définition 2.4.i
Une *fonction de Grundy* est une application $g:X\rightarrow\mathbb{N}$ vérifiant $\forall\, x\in X\ ,\ g(x)=\min(\mathbb{N}\backslash g(\Gamma(x)))$
En clair, c'est le plus petit entier non atteint par les successeurs du sommet considéré.

Théorème 2.4.ii : Tout graphe fini sans circuit possède une unique fonction de Grundy.
Démonstration
Soit m le niveau maximal d'un sommet dans G. $\{S_k\ ;\, 0\leq k\leq m\}$ forme une partition de X.
Construisons g par récurrence sur les S_k :

- Posons g(x) = 0 pour tout x de S_0. Il n'y a pas d'autre choix puisque $\Gamma(x)=\emptyset$ et donc $g(x)=min(\mathbb{N})$.
- Pour $n\geq 1$, supposons g construite sur $S_{n-1}\cup S_{n-2}\cup\cdots\cup S_0$ et soit $x\in S_n$.

  D'après [2.3.iv], l'ensemble d'entiers $g(\Gamma(x))$ est donc déterminé, de même que son complémentaire.

  On peut donc définir sans ambiguïté $g(x)$ comme plus petit élément de $\mathbb{N}\backslash g(\Gamma(x))$.

La fonction g respecte bien la définition [3.4.i] par construction et l'existence est ainsi démontrée.

Supposons l'existence de 2 fonctions de Grundy g et g' :

- pour respecter la définition [3.4.i], g et g' sont nulles sur S_0 et donc $g = g'$ sur S_0 ;
- pour $n \geq 1$, si on a déjà montré que $g = g'$ sur $S_{n-1}\cup S_{n-2}\cup\cdots\cup S_0$ et que $x\in S_n$:

  alors, d'après [2.3.iv] on a $g(\Gamma(x))=g'(\Gamma(x))$ et donc $\mathbb{N}\backslash g(\Gamma(x))=\mathbb{N}\backslash g'(\Gamma(x))$.

  Ces deux ensembles ont donc le même plus petit élément et par définition [2.4.i] on a $g(x) = g'(x)$.

L'unicité est ainsi démontrée par récurrence.

Propriété 2.4.iii : si g est une fonction de Grundy de G, alors $\forall\, x\in G\ ,\ \forall\, y\in\Gamma(x)\ ,\ g(x)\neq g(y)$.
Démonstration
Cela ne pose pas de réelle difficulté puisque $g(y)\in g(\Gamma(x))$ et que, par définition [2.4.i], $g(x)\in\mathbb{N}\backslash g(\Gamma(x))$.

Théorème 2.4.iv : si g est une fonction de Grundy de G, alors $N=\{x\in X\ ;\ g(x)=0\}$ est un noyau de **G**.
Démonstration : Il nous faut démontrer que cet ensemble N satisfait à la définition [2.3.i].

- Si $x\in N$, on a, d'après [2.4.iii] : $\forall\, y\in g(\Gamma(x))\ ,\ g(y)\neq 0$ et donc $\forall\, y\in g(\Gamma(x))\ ,\ g(y)\notin N$, ce qui prouve que $\forall\, x\in N\ ,\ \Gamma(x)\cap N=\emptyset$;
- si $x\notin N$, on a $\min(\mathbb{N}\backslash g(\Gamma(x)))\geq 1$, donc $0\in g(\Gamma(x))$; donc $\exists\, y\in\Gamma(x)\ ,\ g(y)=0$, c'est à dire $y\in N$,

  ce qui prouve que $\forall\, x\notin N\ ,\ \Gamma(x)\cap N\neq\emptyset$.

N est donc bien un noyau de G.

Un résultat intéressant

Les théorèmes [2.4.ii] et [2.4.iv] prouvent que les jeux vérifiant les 4 hypothèses du §[1.2.] possèdent une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs selon que la position de départ est dans le noyau ou pas.

Remarque : Ils ne fournissent hélas pas la stratégie, c'est à dire quel coup jouer pour passer d'une situation de $G=\bar{N}$ (gagnante) à une de $P=N$ (perdante). Ils ne fournissent même pas un moyen direct de trouver le noyau, sinon en calculant de proche en proche la fonction de Grundy, en partant du niveau 0. Dans ce document et à partir de maintenant, le terme « jeu » désignera un jeu à stratégie gagnante.

2.5. Une reprise du « *pas plus de trois* »

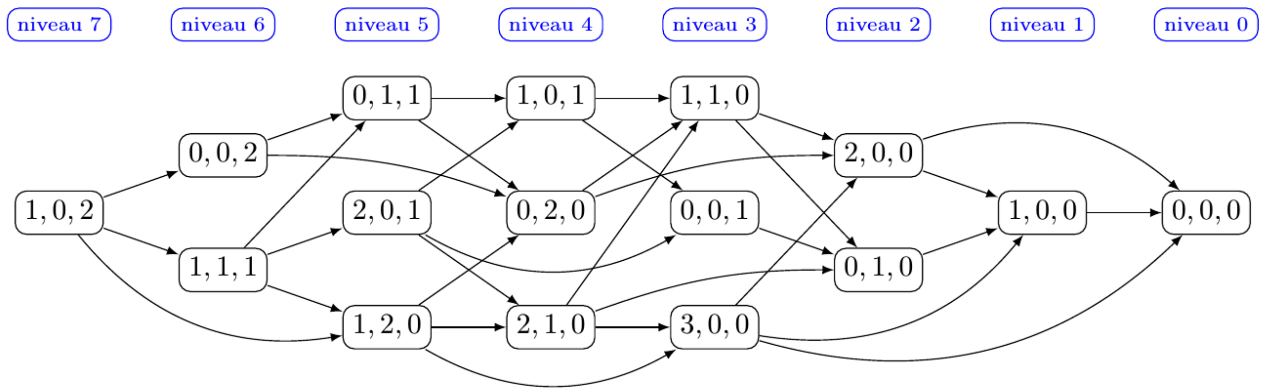
La fonction de Grundy du « *pas plus de trois* » est assez simple à établir car le jeu est relativement linéaire.
Sur le graphe dessiné au §[1.4], on part de la droite et on attribue la valeur 0 au sommet perdant (1). Ensuite on va de proche en proche vers la gauche en attribuant à chaque sommet la plus petite valeur entière positive non atteinte par ses successeurs.
Il apparait rapidement que la série 0-1-2-3 se répète cycliquement et il est assez facile de démontrer par récurrence que $g(n)$ est égal au reste de la division euclidienne de (n - 1) par 4.
On retrouve le fait que les situations perdantes ($g(n)$ = 0) sont les sommets n tels que $n-1\equiv 0\,[4]$.
Qui plus est, le résultat peut aisément se généraliser au « *pas plus de k* » dans lequel on peut prendre à son tour de 1 à k allumettes.

2.6. Une reprise du « *poussé à bout* »

Voyons ce que donne cette fonction de Grundy sur le jeu analysé au §[1.5].
Il faut commencer par ordonnancer le graphe.
En vertu de la propriété [2.3.iv], un sommet est de niveau n s'il n'a plus de successeur une fois supprimés tous les sommets de niveau inférieur. C'est un procédé récursif : S_0 est tout simplement constitué des sommets sans successeur de G, et si on suppose qu'on a identifié et supprimé du graphe les éléments de niveaux 0 à n - 1 (avec les arcs qui les concernaient), les sommets sans successeur du graphe épuré constituent S_n.
Appliquons cela au « *poussé à bout* » :

- S_0 contient le seul sommet sans successeur : (0,0,0)
- une fois enlevé ce sommet, ainsi que les arcs qui y aboutissent, il ne reste qu'un sommet sans successeur qui est donc de niveau 1 : (1,0,0)
- on gomme également ce dernier et tous les arcs qui y arrivent et il apparait deux sommets sans successeurs qui constitueront le niveau 2 : (2,0,0) et (0,1,0)
- on les efface avec tous les chemins qui y arrivent et on voit surgir le niveau 3 : (1,1,0), (0,0,1) et (3,0,0)
- et on continue comme ça jusqu'à épuisement des sommets...

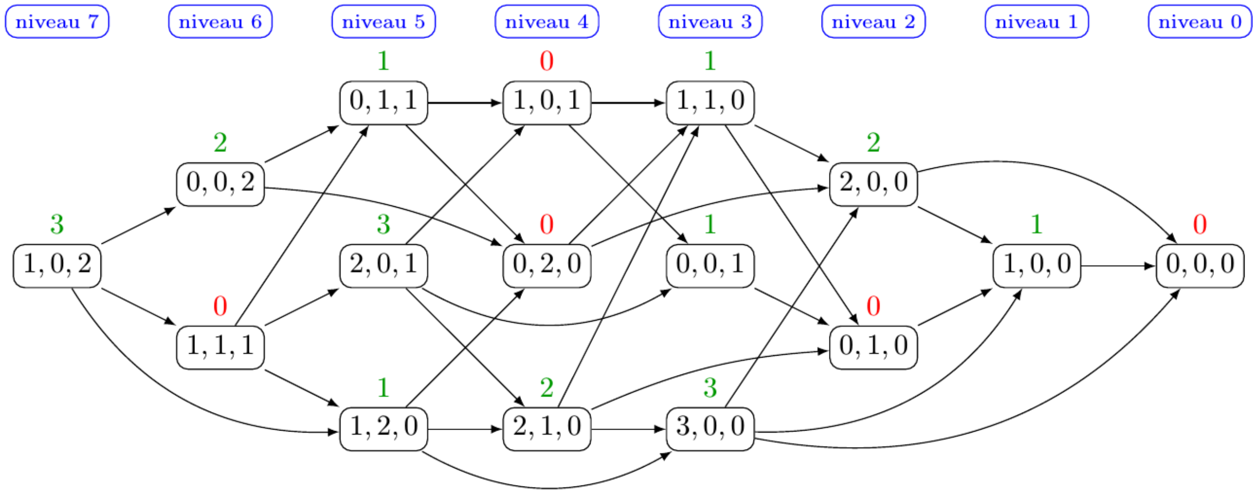
on obtient le graphe ordonnancé suivant :



On appelle aussi *nombre de Grundy* (*nG* en abrégé) d'un sommet son image par la fonction de Grundy.
Pour marquer ce graphe, on part du niveau 0, pour lequel le *nG* est nul.
Puis on passe au niveau 1 pour lequel le *nG* vaut 1 puisque les seuls successeurs sont au niveau 0.
On attaque ensuite le niveau 2 et pour chaque sommet on prend la plus petite valeur entière non atteinte par ses successeurs. Par exemple (2,0,0) a 2 successeurs dont les *nG* sont 0 et 1, ce qui lui donne un *nG* égal à 2. Et (0,1,0) n'a qu'un successeur de valeur 1, donc son *nG* vaut 0.
Au niveau 3 : les valeurs qui succèdent à (1,1,0) sont 2 et 0, d'où son *nG* égal à 1 ; pour (0,0,1) il n'a qu'un successeur de valeur 0, ce qui lui confère un *nG* de 1 ; quant à (3,0,0), il a trois successeurs et les valeurs atteintes sont 0, 1 et 2, et donc son *nG* vaut 3.
Une fois terminé un niveau, on passe au niveau supérieur.

retour au sommaire

Le marquage obtenu sur cet exemple est le suivant (rouge pour les 0 et vert pour les autres) :



2.7. Le théorème de Sprague-Grundy

Ce dernier théorème permet de construire plus rapidement la fonction de Grundy, pourvu qu'on ait trouvé auparavant une façon de décomposer le jeu en situations élémentaires adaptées.
Son utilité n'est pas évidente à percevoir, mais il s'éclairera dans le jeu connu sous le nom de *jeu de Marienbad* en référence au film d'Alain Resnais (*l'année dernière à Marienbad*) qu'on examinera en détail dans la section suivante[4].
Puis dans les sections suivantes, nous verrons aussi des jeux pour lesquels la stratégie gagnante est beaucoup plus délicate à formuler, voire encore inconnue à ce jour... sauf à calculer tous les nombres de Grundy du graphe issu de la position de départ, ce qui est humainement souvent impossible mais programmable.

Théorème 2.7.i :
Soit G un graphe fini sans circuit et g la fonction de Grundy de G.
Soient Ω et Ω' deux parties de X telles que : $\forall x \in \Omega \,,\, \Gamma(x) \subset \Omega$ et $\forall x' \in \Omega' \,,\, \Gamma(x') \subset \Omega'$
Soit une loi notée $\star$ définie de $\Omega \times \Omega'$ dans X vérifiant :
$\forall (x, x') \in \Omega \times \Omega' \,,\, \Gamma(x \star x') = (\Gamma(x) \star x') \cup (x \star \Gamma(x'))$
où $\Gamma(x) \star x' = \{ y \star x' \,;\, y \in \Gamma(x) \}$ et $x \star \Gamma(x') = \{ x \star y' \,;\, y' \in \Gamma(x') \}$.
On a alors : $\forall (x, x') \in \Omega \times \Omega' \,,\, g(x \star x') = g(x) \oplus g(x')$

Démonstration
Soit (x,x') appartenant à $\Omega \times \Omega'$. Procédons par récurrence sur le niveau de $x \star x'$:

- si $x \star x' \in S_0$ alors $g(x \star x') = 0$ et $\Gamma(x \star x') = \emptyset$;

  par hypothèse sur la loi $\star$, on a *a fortiori* $\Gamma(x) \star x' = x \star \Gamma(x') = \emptyset$ et donc $\Gamma(x) = \Gamma(x') = \emptyset$;

  on a donc $g(x) = g(x') = 0$ et la relation $g(x \star x') = g(x) \oplus g(x')$ est démontrée dans ce cas.

- si, pour $n \geq 1$, le résultat est démontré lorsque $x \star x' \in S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup \cdots \cup S_0$, considérons le cas où $x \star x' \in S_n$. Par hypothèse nous avons $\Gamma(x \star x') = \{ y \star x' \,,\, x \star y' \,;\, y \in \Gamma(x) \,,\, y' \in \Gamma(x') \}$

  et donc en vertu de [2.3.iv] :

  $\forall y \in \Gamma(x) \,,\, \forall y' \in \Gamma(x') \,,\, y \star x' \in S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup \cdots \cup S_0 \,;\, x \star y' \in S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup \cdots \cup S_0$

  et par hypothèse de récurrence : $g(y \star x') = g(y) \oplus g(x')$ et $g(x \star y') = g(x) \oplus g(y')$

  donc on a : $g(\Gamma(x \star x')) = \{ g(y) \oplus g(x') \,,\, g(x) \oplus g(y') \,;\, y \in \Gamma(x) \,,\, y' \in \Gamma(x') \}$

  Notons A cet ensemble des nG des successeurs de $x \star x'$.

[4] Sera publié dans un prochain numéro du Petit Vert

retour au sommaire

Si on avait $g(x) \oplus g(x') \in A$, on aurait $\begin{cases} g(x) \oplus g(x') = g(y) \oplus g(x') \text{ avec } y \in \Gamma(x) \\ \text{ou} \\ g(x) \oplus g(x') = g(x) \oplus g(y') \text{ avec } y' \in \Gamma(x') \end{cases}$

et comme $(\mathbb{N}, \oplus)$ est un groupe (voir [2.2.i]) on aurait $\begin{cases} g(x) = g(y) \text{ avec } y \in \Gamma(x) \\ \text{ou} \\ g(x') = g(y') \text{ avec } y' \in \Gamma(x') \end{cases}$

ce qui est férocement impossible en vertu de la propriété [2.4.iii],

et donc : $g(x) \oplus g(x') \notin A$, autrement dit $g(x) \oplus g(x') \in \mathbb{N} \setminus A$.

Comme $g(x \star x') = \min(\mathbb{N} \setminus A)$ par définition [2.4.i], on a donc $g(x \star x') \leq g(x) \oplus g(x')$.

Remarquons que $g(x)$ et $g(x')$ ne peuvent être tous les deux nuls car alors $g(x \star x')$ le serait aussi, ce qui contredirait l'hypothèse de travail selon laquelle $x \star x' \in S_n$ avec $n \geq 1$.

Si on avait $g(x \star x') < g(x) \oplus g(x')$, la propriété [2.2.ii] donnerait un entier $z < g(x)$ tel que $g(x \star x') = z \oplus g(x')$ (une démonstration analogue se ferait avec $z < g(x')$ tel que $g(x \star x') = g(x) \oplus z$).

Comme $g(x) = \min(\mathbf{N} \setminus \Gamma(x))$, on aurait donc $z \in \Gamma(x)$, ce qui donnerait $z = g(y) \text{ avec } y \in \Gamma(x)$ et par conséquent $g(x \star x') = g(y) \oplus g(x') \text{ avec } y \in \Gamma(x)$, ce qui voudrait dire que $g(x \star x') \in A$ et contredirait la propriété [2.4.iii].

On a donc $g(x \star x') = g(x) \oplus g(x')$.

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque : Ce théorème établit en fait que si un jeu G est une combinaison de deux jeux $H \times K$, dans lequel un successeur de $(x\,;y)$ est soit un successeur de x combiné avec y, soit x combiné avec un successeur de y, alors le NG de $(x;y)$ est la *nim-addition* des *nG* de x et de y.

3. LE JEU DE MARIENBAD OU JEU DE NIM

3.1. La règle du jeu

Un certain nombre de tas d'allumettes sont disposés sur la table et chaque joueur doit, à son tour, prélever une ou plusieurs allumettes dans un des tas (il peut vider le tas s'il veut). Le perdant est le joueur ne pouvant plus jouer (le gagnant est celui qui vide le dernier tas).

Il est aisé de vérifier que ce jeu vérifie bien les hypothèses mentionnées au §[1.2].

Il en existe une variante où celui qui prend la dernière a perdu. Nous l'étudierons à la fin de cette section.

3.2. Notations

Soit n le nombre de tas en début de partie et T_i le nombre d'allumettes dans le tas n° i.

Les sommets du graphe G constituent l'ensemble $X = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n),\ 0 \leq t_i \leq T_i,\ \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$

Pour un sommet $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in X$,

on a $\Gamma(x) = \{(y_k)_{1 \leq k \leq n} \in X\ ;\ \exists\, i \in \{1, 2, \cdots, n\},\ 0 \leq y_i < x_i,\ \forall\ j \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i\},\ y_j = x_j\}$

Un seul sommet est sans successeur : $S_0 = \{(0, 0, \cdots, 0)\}$.

3.3. La fonction de Grundy du jeu de Marienbad

Le but est ici de calculer le *nG* d'un sommet sans avoir à passer par le procédé récursif partant de S_0. Pour cela nous allons utiliser le théorème [2.7.i] après avoir mis en place les hypothèses requises.

Notons g la fonction de Grundy de ce graphe.

Remarque : une permutation des tas ne modifiant aucunement le jeu, une permutation des coordonnées d'un sommet n'en modifie pas le *nG*.

Propriété 3.3.i : pour tout $p \geq 0$, on a $g(0, \ldots ,0, p, 0, \ldots 0) = p$.

Démonstration

retour au sommaire

Montrons par récurrence que $g(p,0,0,\dots,0)=p$ (ce qui suffit, vue la remarque précédente).

Cela est trivial pour $p = 0$ puisque c'est la situation sans successeur du jeu.
Prenons maintenant $p \geq 1$; on a $\Gamma(p,0,0,\cdots,0)=\{(q,0,0,\cdots,0)\,;\,0\leq q\leq p-1\}$,
et par hypothèse de récurrence $g(\Gamma(p,0,0,\cdots,0))=\{0,1,2,\cdots,p-1\}$
le plus petit entier non atteint étant p, on en déduit $g(p,0,0,\dots,0)=p$, ce qui achève la récurrence.

Propriété 3.3.ii :
Les ensembles $\Omega=\{(x_1,0,0,\cdots,0)\}$ et $\Omega'=\{(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)\}$ munis de l'opération $\star$ définie de $\Omega\times\Omega'$ dans X par $(x_1,0,0,\cdots,0)\star(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$
vérifient les hypothèses du théorème [2.7.i]
<u>*Démonstration*</u>
Comme un coup légal consiste à diminuer une des coordonnées du sommet, il est clair qu'un successeur d'un élément de Ω (resp. Ω') est dans Ω (resp. Ω').
Par ailleurs, en prenant $x=(x_1,0,\cdots,0)\in\Omega$, $x'=(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)\in\Omega'$, $z\in\Gamma(x\star x')$,

on a $\begin{cases} z = (y_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \text{ avec } y_1<x_1 \\ \text{ou} \\ z = (x_1,x_2,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n) \text{ avec } i\geqslant 2 \text{ et } y_i<x_i \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} z = (y_1,0,0\dots,0)\star(y_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \text{avec } y_1<x_1 \\ \text{ou} \\ z = (x_1,0,0\dots,0)\star(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n) \text{avec } i\geqslant 2 \text{ et } y_i<x_i \end{cases}$.

On remarquera que $y=(y_1,0,\cdots,0)\in\Gamma(x)$ puisque $y_1 < x_1$
et que $y'=(0,x_2,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\in\Gamma(x')$ puisque $i \geq 2$ et $y_i < x_i$.

Donc on a $\begin{cases} z = y\star x' \text{ avec } y\in\Gamma(x) \\ \text{ou} \\ z = x\star y' \text{ avec } y'\in\Gamma(x') \end{cases}$, ce qui prouve que $\Gamma(x\star x')\subset(\Gamma(x)\star x')\cup(x\star\Gamma(x'))$

Réciproquement, soit $z\in(\Gamma(x)\star x')\cup(x\star\Gamma(x'))$.

- Si $z\in\Gamma(x)\star x'$, alors $z=y\star x'$ avec $y\in\Gamma(x)$

  c'est à dire $z=(y_1,0,\cdots,0)\star(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)=(y_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$ avec $y_1<x_1$

  qui est bien un successeur de $x\star x'=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$.
- Si $z\in x\star\Gamma(x')$, alors $z=x\star y'$ avec $y'\in\Gamma(x')$, c'est à dire, avec $i\geq 2$ et $y_i<x_i$,

  $z=(x_1,0,\cdots,0)\star(0,x_2,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$

  qui est encore un successeur de $x\star x'=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$.

On a donc prouvé que $(\Gamma(x)\star x')\cup(x\star\Gamma(x'))\subset\Gamma(x\star x')$
et finalement que $\Gamma(x\star x')=(\Gamma(x)\star x')\cup(x\star\Gamma(x'))$.
Ce qui prouve que les hypothèses du théorème [2.7.i] sont vérifiées.

Théorème 3.3.iii
Pour le jeu de Marienbad, $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus\cdots\oplus x_n$
<u>*Démonstration*</u>
Le théorème [2.7.i] utilisé avec les notations de la propriété [3.3.ii] et la propriété [3.3.i] donnent :
$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,0,\cdots,0)\oplus g(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)=x_1\oplus g(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)$
et par permutation $g(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)=g(x_2,0,x_3,\cdots,x_n)=x_2\oplus g(0,0,x_3,\cdots,x_n)$
et donc $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1\oplus(x_2\oplus g(0,0,x_3,\cdots,x_n))=x_1\oplus x_2\oplus g(0,0,x_3,\cdots,x_n)$
on récurre comme ça jusque $g(0,0,\cdots,0,x_n)=g(x_n,0,0,\cdots,0)=x_n$ ce qui prouve le résultat.

retour au sommaire

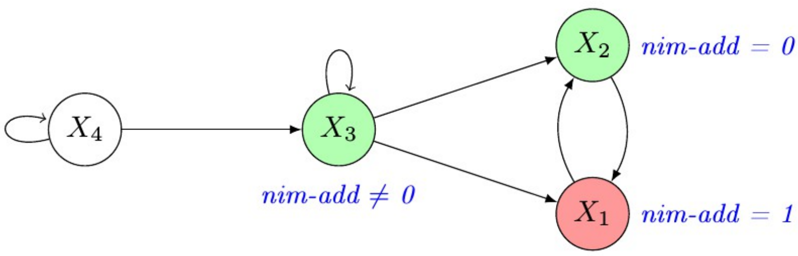
3.4. La stratégie du jeu de Marienbad

Au vu des résultats précédents, la stratégie gagnante du jeu de Marienbad consiste à laisser à son adversaire une situation pour laquelle la *nim-addition* des nombres d'allumettes est nulle.

Autrement dit, une position est perdante si en convertissant les nombres d'allumettes en binaire et en disposant ces nombres comme pour en faire l'addition, chaque colonne comporte un nombre pair de "1".
Prenons par exemple le cas où il reste 4 tas comportant 6, 3, 4 et 2 allumettes.
Le *nG* associé est donc $g(6,3,4,2)=6\oplus3\oplus4\oplus2=[110]\oplus[011]\oplus[100]\oplus[010]=[011]=3\neq0$.
Cette situation est donc gagnante et pour suivre la stratégie, il faut modifier la parité des "1" dans la colonne de droite et dans celle du milieu de cette addition.
Le plus simple est ici de « rafler » le tas de 3 ($6\oplus0\oplus4\oplus2=[110]\oplus[000]\oplus[100]\oplus[010]=[000]=0$), mais on peut aussi prendre 1 allumette dans le tas de 6
($5\oplus3\oplus4\oplus2=[101]\oplus[011]\oplus[100]\oplus[010]=[000]=0$),
ou encore prendre 1 allumette dans le tas de 2 ($6\oplus3\oplus4\oplus1=[110]\oplus[011]\oplus[100]\oplus[001]=[000]=0$).
Parfois le choix est restreint... mais toujours possible !
Par exemple sur la situation gagnante (9,7,6,2,2) dont le *nG* vaut 8, le seul coup possible pour amener l'adversaire à une situation perdante est de prendre 8 allumettes dans le tas de 9.

3.5. Étude d'une variante

Lorsqu'on décide que le perdant est celui qui prend la dernière allumette, il nous faut reconsidérer la stratégie car les *nG* ne se calculent plus sur le principe précédent.
Néanmoins, le travail précédent est récupérable (*ouf !*).
• Soit $X_1\subset X$ l'ensemble des situations comportant un nombre impair de tas de 1 allumette. Elles sont de façon évidente perdantes dans cette variante.
• Soit $X_2\subset X$ l'ensemble des situations comportant un nombre pair de tas de 1 allumette. Elles sont donc gagnantes.
Notons sur ces deux ensembles qu'un coup légal fait passer une situation de X_1 à une de X_2 , et réciproquement, jusqu'à laisser 1 tas de 1 allumette, configuration perdante finale.
• Soit $X_3\subset X$ l'ensemble des situations constituées d'un tas de p allumettes avec $p\geq2$ et de k tas de 1 allumette, avec $k\geq0$. Les situations de X_3 sont gagnantes car elles mènent toutes en un coup à une situation de X_1 : soit k est pair et on prend p - 1 allumettes dans le tas de p, soit k est impair et on prend tout le tas de p allumettes.
Sinon, un coup porté sur un élément de X_3 peut aussi conduire à un élément de X_2 ou de X_3.
Remarquons aussi que la *nim-addition* sur un élément de X_3 ne donne jamais 0 car l'unique tas de plus de 1 allumette crée au moins une colonne avec un nombre impair de "1".
• Enfin soit X_4 l'ensemble de tous les autres sommets de G, c'est-à-dire ceux correspondant aux situations où il y a au moins deux tas d'au moins deux allumettes. Puisqu'on ne peut piocher que dans un seul tas, un coup mené sur un élément de X_4 ne peut aboutir qu'à un élément de X_4 ou de X_3.
Nous pouvons résumer la situation sur le diagramme suivant :



On applique alors la stratégie gagnante suivante :

• s'il reste au moins deux tas d'au moins deux allumettes, on joue comme dans la version précédente en laissant à l'adversaire des situations dont la *nim-addition* est nulle (qui ne peuvent être que dans X_4). Comme les nombres d'allumettes vont décroissants, l'adversaire nous laissera fatalement à un moment une situation de X_3 ;

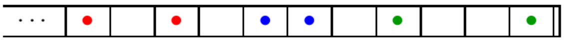
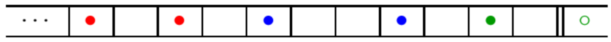
retour au sommaire

• s'il n'y a qu'un tas d'au moins deux allumettes éventuellement complété avec des tas de une allumette, alors on joue en lui laissant un nombre impair de tas de une allumette *;*

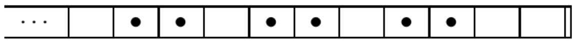
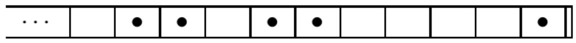
• s'il n'y a que des tas de une allumette on n'a pas le choix... On vide un tas (en espérant qu'il y en a un nombre pair sinon on a perdu !).

3.6. UN RETOUR AU « *POUSSÉ À BOUT* »

Le « *poussé à bout* » se généralise avec un nombre quelconque de jetons et n'est en fait qu'une version masquée du jeu de Marienbad en considérant les jetons groupés par paires en partant de la gauche. Si le nombre de jetons est impair, on groupe celui de droite avec la frontière, comme si on ajoutait une case à droite en y mettant un jeton supplémentaire :

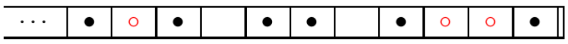



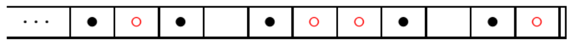
Les configurations où les jetons sont accolés par paires sont perdantes :

- cela est évident s'il n'y a plus d'espace libre entre les paires ;
- sinon, dès qu'un pion sera bougé, il sera possible de regrouper la paire désolidarisée au tour suivant pour laisser à nouveau une situation de ce type.

Dans le cas général, comptabilisons juste les espaces inclus dans ces paires (marquées d'un cercle rouge ci-dessous) en ne tenant pas compte des espaces séparant les paires :

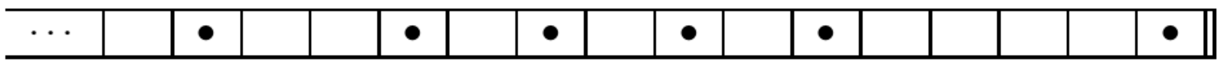

$(1;0;2)$


$(1;2;1)$

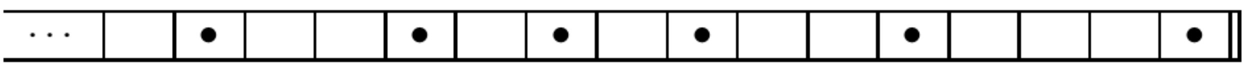
Le but est donc de laisser à l'adversaire une situation ne comportant que des zéros, qui ne sera peut-être pas la fin de partie, mais qui sera une position perdante.
La stratégie peut dès lors être déduite du jeu de Marienbad (en considérant que les nombres de cases vides dans chaque couple représentent les tas d'allumettes) :

- on laisse à l'adversaire une *nim-addition* nulle de ces nombres en déplaçant un jeton de gauche d'un couple (cela correspond à la prise d'allumettes dans un tas) *;*
- quand l'adversaire pousse un jeton de gauche d'une paire, il prend des allumettes dans un tas et on applique la stratégie du jeu de Marienbad *;*
- quand l'adversaire pousse un jeton de droite d'un couple, il augmente un tas et il suffit alors de pousser le jeton de gauche associé du même nombre de cases pour le ramener à la situation perdante précédente.

Prenons par exemple la situation suivante :



La situation de Marienbad associée est (2,1,4), dont le *nG* est $1 \oplus 2 \oplus 4 = 7$.
Il faut donc pousser le deuxième jeton en partant de la droite d'une case pour laisser à l'adversaire la situation (1,2,3) dont la *nim-addition* est nulle :



Le fait qu'un tas puisse augmenter lors d'un coup de l'adversaire ne présente pas de réel inconvénient puisque cela l'amène sur une situation dont le *nG* est non nul, et qu'au coup suivant on le ramène sur la situation précédente au *nG* nul. Cette façon d'aborder le jeu permet de calculer rapidement le *nG* d'une position : on fait la *nim-addition* des nombres de cases vides inclus dans les paires de jetons groupés en partant du jeton de gauche (en cas d'imparité, le jeton de droite est groupé avec un jeton imaginaire placé juste derrière la ligne d'arrivée).
Dans le cas de trois jetons, on retrouve les positions perdantes mises en évidence au §[2.6] pour lesquelles il y a autant de cases vides entre les deux jetons de gauche qu'à droite du jeton de droite (la nim-addition de deux nombres est nulle si et seulement si les deux nombres sont égaux).

Dans la seconde partie de cet article, qui sera publiée dans le Petit Vert 127, nous étudierons le jeu des deux tas d'or ou jeu de Withoff, le jeu de Grundy, le jeu des fleurs et la tablette de chocolat empoisonnée.

retour au sommaire