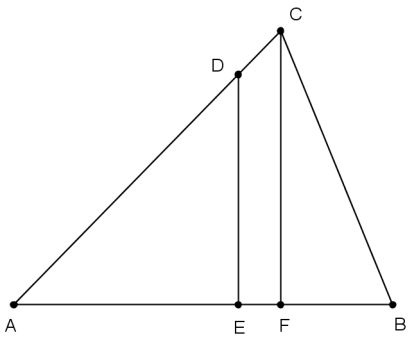
LE SOPHISME DU TRIMESTRE

La définition du dictionnaire Robert est la suivante : « *Argument, raisonnement faux malgré une apparence de vérité* ». Le Petit Vert vous proposera régulièrement des sophismes, comme celui qui suit.
Envoyez toute nouvelle proposition à jacverdier@orange.fr.

Théorème : **La somme des racines carrées de deux nombres est égale à la racine carrée du double de leur somme :** $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2(a+b)}$ **.**



Soit un triangle ABC, et la hauteur CF issue de C. On pose p = AF, q = FB, h = CF.
On considère le segment DE parallèle à CF qui partage le triangle ABC en deux parties d'aires égales.
On pose x = AE, y = EB et h' = DE (voir figure ci-contre).
L'aire de AED est égale à l'aire de EBCD ; l'aire de ABC est donc le double de l'aire de AED (1).
Ce qui peut s'écrire $\frac{1}{2}(p+q)\,h = 2\times\frac{1}{2}\,x\,h' = x\,h'$ (2)

Par ailleurs, le triangle AED est semblable au triangle AFC, d'où $\frac{h'}{h}=\frac{x}{p}$, d'où $h' = h\,\frac{x}{p}$ (3).

En reportant dans (2), il vient $\frac{1}{2}(p+q)\,h = \frac{x^2.h}{p}$ (4), d'où l'on tire $x=\sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}$ (5).

De la même manière, puisque x et q d'une part et y et p d'autre part jouent des rôles symétriques, on a $y=\sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$ (6).

En additionnant (5) et (6) il vient : $x+y=\sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}+\sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$,

et – puisque $x+y=p+q$, $p+q=\sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}+\sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$ (8).

En divisant les deux membres de cette égalité par $\sqrt{p+q}$, on obtient $\sqrt{p+q}=\sqrt{\frac{p}{2}}+\sqrt{\frac{q}{2}}$ (9).

En posant $a=\frac{p}{2}$ et $b=\frac{q}{2}$, cette dernière égalité devient $\sqrt{2a+2b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Le théorème énoncé ci-dessus est donc démontré.

Solution du Sophisme précédent (Petit Vert n°124)

3 = 2, la preuve...

Rappel de l'énoncé : On sait que la dérivée de x^3 est $3x^2$. Mais x^3, c'est aussi x fois x^2, ce qui s'écrit aussi, si on prend x entier : $x^2+x^2+\ldots+x^2$, où on a écrit x fois x^2. On dérive alors cela comme une somme (la dérivée de x^2 est $2x$) : la dérivée de x^3 est $2x+2x+\ldots+2x$ où on a écrit x fois $2x$. Cette dérivée est donc $x.2x = 2x^2$; on a donc obtenu, pour les valeurs entières de x : $3x^2 = 2x^2$. On en conclut que 3 = 2.

Il y a en fait deux erreurs de raisonnement. Dire que x^3 vaut $x^2+x^2+\ldots+x^2$ avec x termes n'est pas une de ces deux erreurs, c'est tout-à-fait correct : on a bien précisé que x était un entier.
La première erreur dans le raisonnement est la suivante : x est entier et on ne peut pas dériver une fonction définie uniquement sur les entiers (pour dériver une fonction en un point a, il est nécessaire que la fonction soit définie dans un **voisinage de *a***, et pas seulement en *a)*.
La seconde raison pour laquelle cette dérivation est fausse est que le nombre de termes de la somme dépend de x (puisque c'est x lui-même), et donc on ne peut pas dériver par rapport à cet x ! On peut dériver ***n*** termes dépendants de x, mais pas dériver x termes dépendants de x...

D'après http://maths.amatheurs.fr

retour au sommaire