SOLUTION DU PROBLÈME N°124

Rappel de l'énoncé (proposé par Jacques Choné) : Soit ABC un triangle. Déteminer le point M du plan de ce triangle tel que la somme des aires des triangles BCM, CAM et ABM soit minimum et préciser cette valeur minimum.

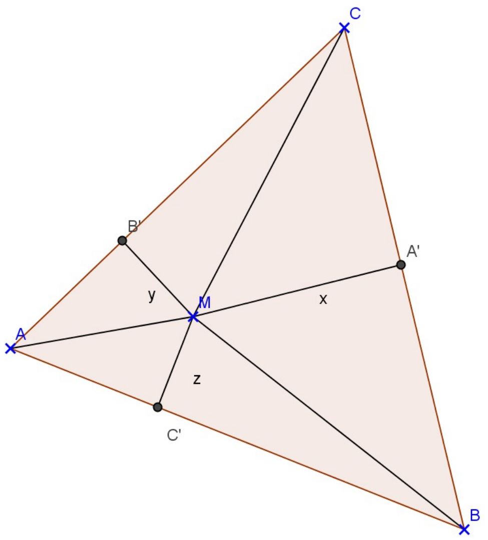
Une réponse a été transmise ; la solution proposée par l'auteur du problème ne sera donc pas exposée. Pour information, Jacques Choné considère les coordonnées barycentriques de M.

Solution proposée par Renaud Dehaye

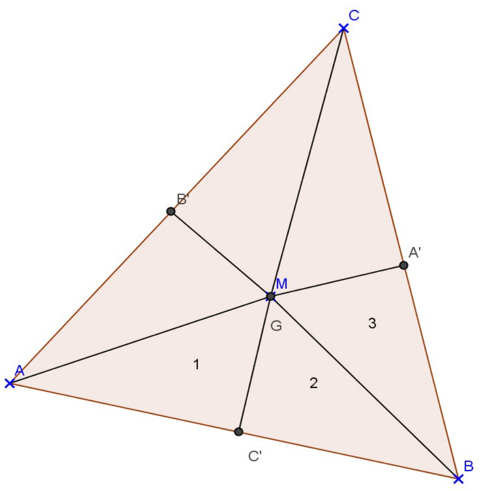
On s'appuiera sur la figure ci-contre :

En notant *x, y, z* les hauteurs des triangles BCM, ACM et ABM, et *a, b, c* les longueurs BC, AC et AB, on cherche à minimiser la quantité :

$$S(x,y,z)=\left(\frac{ax}{2}\right)^2+\left(\frac{by}{2}\right)^2+\left(\frac{cz}{2}\right)^2$$



Or, lorsque M=G, centre de gravité du triangle ABC, on a trois triangles de même aire c'est-à-dire *ax=by=cz*.



En effet, les triangles 1 et 2 ont même aire car C' est le milieu de [AB].

Le triangle AMB (1 et 2 réunis) a une aire double de celle du triangle 3 car M est au deux tiers de la médiane [AA']. Ainsi les triangles 1, 2 et 3 ont la même aire. Etc...

Reste à trouver la bonne forme « canonique » pour S(*x,y,z*) !

La voici :

$$S(x,y,z)=\frac{1}{12}\times(ax+by+cz)^2+\frac{1}{12}(ax-by)^2+\frac{1}{12}(by-cz)^2+\frac{1}{12}(ax-cz)^2$$

soit

$$S(x,y,z)=\frac{1}{3}\times(aire\ ABC)^2+\frac{1}{12}(ax-by)^2+\frac{1}{12}(by-cz)^2+\frac{1}{12}(ax-cz)^2$$

Cette expression permet de conclure provisoirement : le minimum est $\frac{1}{3}\times(aire\ ABC)^2$; il est atteint lorsque *ax=by=cz*.

G est-il le seul point à vérifier *ax=by=cz* ?

retour au sommaire

On peut montrer que, lorsque *ax=by*, le point M est nécessairement sur la médiane issue de C. De même, lorsque *by=cz*, le point M est nécessairement sur la médiane issue de A. Donc, lorsque *ax=by=cz*, on a bien M=G.

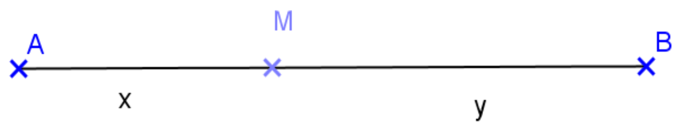
REMARQUE : *Ce dernier paragraphe restant obscur (position de M sur la médiane ?) pour le responsable de la rubrique (qui a toujours des problèmes en géométrie, comme déjà signalé), voici un argument différent permettant de conclure :*

Lorsque ax=by=cz, on a alors $S(x,y,z)=3\left(\frac{ax}{2}\right)^2=\frac{1}{3}(aire\ ABC)^2$ *, soit* $x=\frac{2}{3}\frac{aire\ ABC}{a}$.

Le point M est alors à une distance x de la droite (BC) et du même côté de (BC) que A, En raisonnant de la même manière pour y et z, M est point d'intersection de trois droites parallèles aux trois côtés, entièrement déterminées, (forcément) concourantes, ce qui permet de conclure en l'unicité du point M réalisant le minimum de S.

Quelques variations autour du problème n°124, proposées par Renaud Dehaye.

Problème 1. Soit un segment [AB]. Déterminer le point M du segment tel que la somme des carrés des longueurs AM et MB soit minimum.



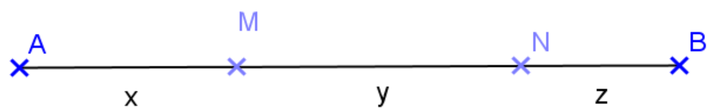
En considérant que AB=1, on pose alors AM=*x* et MB=*y*. Ainsi *x+y*=1.
Il s'agit de minimiser la quantité $S(x,y)=x^2+y^2$. On peut conjecturer (intuition? essais?) que ce minimum est atteint lorsque $x=y=\frac{1}{2}$. On peut alors chercher une forme « canonique » de S(*x,y*) qui rende compte de cette conjecture.

Or $S(x,y)=x^2+y^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ compte tenu de l'égalité *x+y*=1.

Cette expression est minorée par $\frac{1}{2}$, valeur qui est atteinte lorsque $x=y=\frac{1}{2}$.

Conclusion : le point M est le milieu de [AB].

Problème 2. Soit un segment [AB]. Déterminer les points M et N du segment [AB] tel que la somme des carrés des longueurs AM, MN et NB soit minimum. (N est situé entre M et B)



Il s'agit de minimiser la quantité $S(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

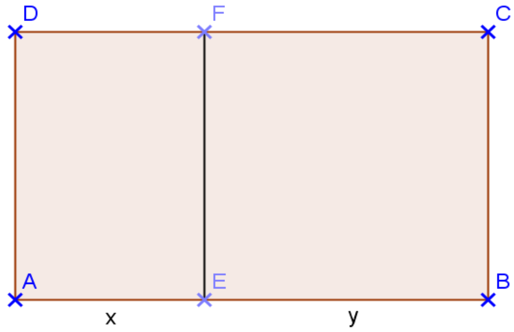
Or $S(x,y)=x^2+y^2+z^2=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$ compte tenu de l'égalité *x+y+z*=1.

Cette expression est minorée par $\frac{1}{3}$, valeur qui atteinte lorsque $x=y=z=\frac{1}{3}$

Conclusion : les points M et N partagent le segment [AB] en trois segments de même longueur.

retour au sommaire

Problème 3. Soit un rectangle ABCD. Comment le partager en deux rectangles tels que la somme des carrés de leurs aires soit minimum ?



Ce problème est modélisé par la figure ci-dessus en considérant que AB est l'unité de longueur.

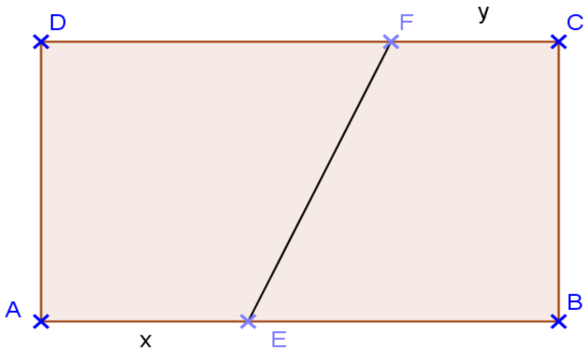
Il s'agit de minimiser la quantité $S(x,y)=(AD\times x)^2+(AD\times y)^2=AD^2\times(x^2+y^2)$.

On retrouve le problème 1 car AD ne varie pas.

Conclusion : le partage se fait à l'aide de la médiane du rectangle ABCD.

Idem si l'on doit partager la longueur AB en 3 en écho au problème 2.

Problème 4. Soit un rectangle ABCD. Comment le partager en deux trapèzes tels que la somme des carrés de leurs aires soit minimum ?



En modélisant le problème à l'aide de la figure ci-dessus et en choisissant AB pour unité de longueur, on pose AE=*x* et FC=*y*.

Il s'agit de minimiser la quantité $S(x,y)=\left(\frac{AD}{2}\times(x+1-y)\right)^2+\left(\frac{AD}{2}\times(y+1-x)\right)^2$.

qui s'écrit aussi $S(x,y)=\left(\frac{AD}{2}\right)^2\times[2(x-y)^2+2]$. On voit ici clairement que le minimum est atteint lorsque *x*=*y* c'est-à-dire lorsque les trapèzes sont superposables.

Le problème du trimestre (n°125)

Démontrer qu'il existe une unique suite (f(n)) croissante, de premier terme f(1)=1, et telle que, pour tout entier naturel non nul n , on a f(n)= card*{m, f(m)=n}.*
La condition de monotonie est-elle nécessaire ?

André STEF est responsable de la rubrique "Problèmes". Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr .
NB (du responsable de la rubrique) : Les problèmes de géométrie posent de sérieux soucis au responsable de la rubrique, il ne faut donc pas compter sur lui pour en proposer. Il est donc fait particulièrement appel aux lecteurs pour suggérer de tels problèmes.

retour au sommaire