ÉTUDE MATHÉMATIQUE

LA ROUE ET LA ROUTE

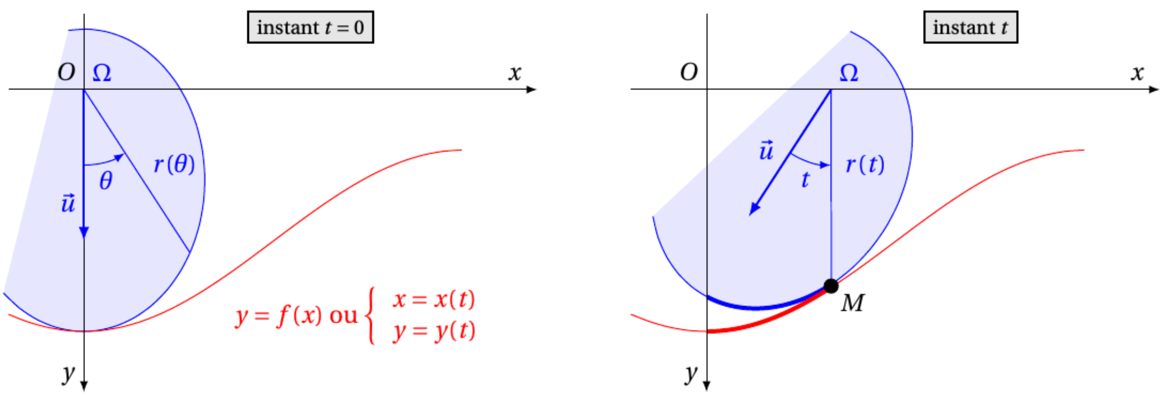
Par Alain SATABIN,
Professeur retraité du lycée de Lunéville

1. Ré-inventons la roue !

Pourquoi des roues circulaires ? N'est-il pas possible de concevoir une roue d'une forme différente ?
La contrainte étant que l'axe décrive une trajectoire rectiligne lorsque la roue tourne, il est clair que la roue circulaire avec axe au centre et une route plane fournissent la solution la plus simple. Qui plus est, cette solution triviale confère à l'axe une vitesse constante lorsque la roue tourne à vitesse constante.
Donc gardons nos habitudes pour nos moyens de transport !
Mais quand même . . . essayons d'envisager d'autres possibilités.

2. Mathématisons le problème

L'équation de la route (en rouge) est posée sous forme fonctionnelle $y=f(x)$ ou paramétrique $(x(t);y(t))$ dans un repère (Oxy) où l'axe des abscisses est orienté vers la droite et celui des ordonnées vers le bas[5].
La roue (en bleu) sera paramétrée en polaire avec origine à la position de son axe Ω et une direction de référence $(\mathrm{O},\vec{u})$ correspondant à un des « rayons » de la roue.
À l'instant 0, l'axe Ω est en O et le rayon $(\mathrm{O}\,\vec{u})$ attaché à la roue coïncide avec (Oy). De plus, lorsque la roue tourne et se déplace sans glisser sur la route, son axe Ω doit décrire l'axe (Ox).
Il n'est pas restrictif de supposer que la vitesse angulaire de la roue est 1 radian par seconde, c'est à dire qu'à l'instant t la roue a tourné d'un angle t, et qu'elle se déplace de la gauche vers la droite. De plus, son axe est toujours situé à la verticale du point M de contact avec la route.



Ce point M a pour coordonnées $(x(t);y(t))$ avec $y(t)=r(t)$ et une abscisse égale à celle de Ω.
Le fait que la roue roule sans glisser sur la route se traduit pas le fait que les distances curvilignes en gras sur la figure de droite (rouge et bleue) sont égales. Cette condition s'écrit :

$$\int_0^t \sqrt{r^2\,dt^2+dr^2}=\int_0^t \sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Ce qui conduit à l'équation différentielle :

5 Histoire que la roue soit au-dessus de la route.

retour au sommaire

Et compte tenu du fait que $\begin{cases} y(t)=r(t) \\ r(t)>0 \\ \dfrac{dx}{dt}>0 \end{cases}$, on obtient $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r(t) \\ x(0)=0 \end{cases}$

Les contraintes liant la roue et la route sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x(t)=\int_0^t r(v)\,\mathrm{d}v \\ y(t)=r(t) \end{cases}$$

Dans certains cas, l'élimination du paramètre entre x et y donnera une équation fonctionnelle de la route.

3. Petite remarque sur la vitesse

En supposant que la roue a une vitesse angulaire constante, son axe avance à une vitesse de :

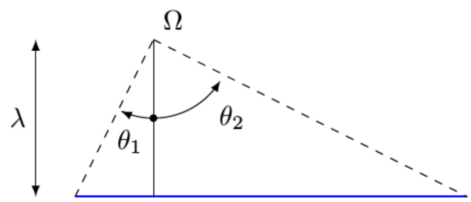
$$x'(t)=r(t)$$

Le véhicule avance donc d'autant moins vite que l'axe est près de la route . . . ce qui, somme toute, est assez logique !
Pour une roue circulaire avec axe au centre, on retrouve une avance régulière puisque l'axe est toujours à la même distance de la route.
Dans les autres cas l'avance se fera de façon irrégulière pouvant occasionner quelques nausées [6] !

4. Une roue polygonale

Étudions le cas où une portion de roue est un segment de droite. Il suffira ensuite d'abouter les solutions trouvées pour la route afin de l'adapter à une roue polygonale.

La bande de roulement de la roue (en bleu) étant située à une distance λ de l'axe Ω et délimitée par les angles polaires θ_1 et θ_2 , son équation polaire est :



$$\begin{cases} r(\theta)=\dfrac{\lambda}{\cos(\theta)} \\ -\dfrac{\pi}{2}<\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pour l'équation de la route nous aurons donc, avec $\theta_1\leq t\leq\theta_2$:

$$\begin{cases} x(t)=\int_0^t \dfrac{\lambda}{\cos(v)}\,\mathrm{d}v=\lambda\ln\left(\tan\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) \\ y(t)=r(t)=\dfrac{\lambda}{\cos(t)} \end{cases}$$

En posant $u=\tan(\dfrac{t}{2})$ on obtient :

$$x=\lambda\ln(\frac{1+u}{1-u})=2\,\lambda\,\operatorname{arg\,tanh}(u) \text{ et } y=\lambda\,\frac{1+u^2}{1-u^2}$$

Ce qui donne :

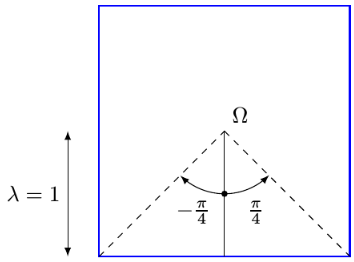
$$y=\lambda\,\frac{1+\tanh^2(\dfrac{x}{2\lambda})}{1-\tanh^2(\dfrac{x}{2\lambda})}=\lambda\cosh(\frac{x}{\lambda})$$

[6] Pensez à prendre votre "nautamine" !

retour au sommaire

La portion de route adaptée au segment de droite ci-dessus est donc la *chaînette* d'équation fonctionnelle :

$$\begin{cases} y=\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)\\ \lambda\ln\left(\tan\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right)\right)<x<\lambda\ln\left(\tan\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\end{cases}$$

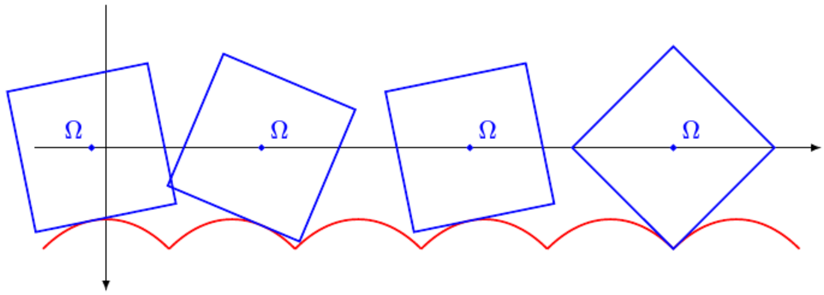


Prenons le cas d'une roue carrée de côté 2 avec l'axe au centre ($\lambda=1$). Le côté en contact avec la route à l'instant 0 est paramétré comme ci-dessus avec $\theta_1=-\frac{\pi}{4}$ et $\theta_2=\frac{\pi}{4}$.

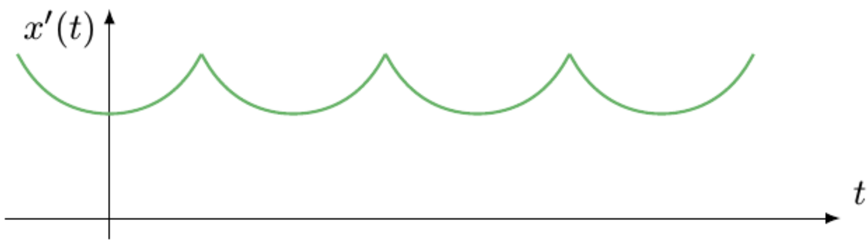
La portion de route adaptée au roulement de ce premier côté du carré a donc pour équation :

$$\begin{cases} y=\cosh(x)\\ -\ln(1+\sqrt{2})<x<\ln(1+\sqrt{2})\end{cases}$$

Il suffit ensuite de produire cette portion périodiquement pour assurer le roulement des autres côtés du carré.



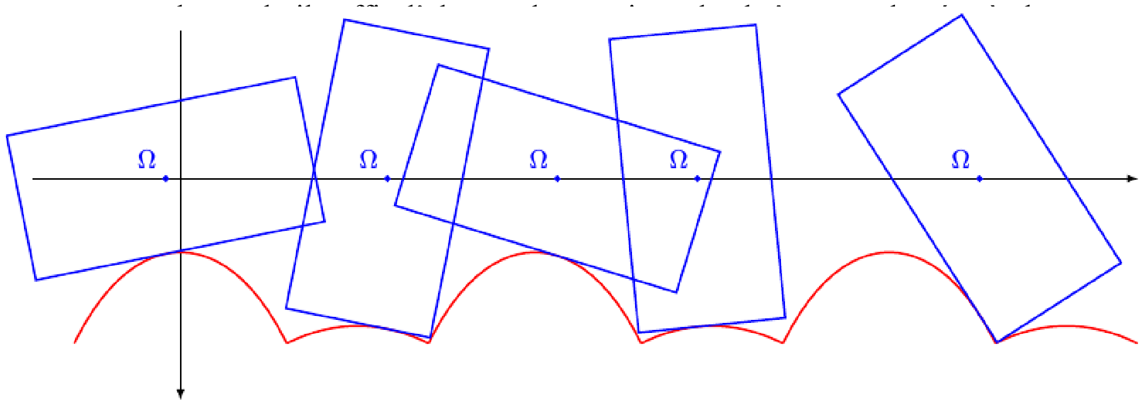
Et le diagramme de vitesse du véhicule est le suivant :



Si nous prenons un rectangle de côtés 2 et 4, avec axe au centre, je vous laisse le soin de vérifier que les chainettes de roulement sont des translatées de :

$$\begin{cases} y=\cosh(x)\\ -\ln(2+\sqrt{5})<x<\ln(2+\sqrt{5})\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y=2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\\ -2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)<x<2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\end{cases}$$

Pc le la



5. Une roue elliptique

Considérons une roue *elliptique* avec son axe au foyer. En notant a son demi-grand-axe et e son excentricité, son équation polaire est :

$$r(\theta)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta)}$$

Pour l'abscisse de l'axe et du point de contact à l'instant t, nous avons donc :

$$x(t)=a(1-e^2)\int_0^t \frac{dv}{1+e\cos(v)}$$

Un changement de variable $u=\tan(\frac{v}{2})$ conduit à :

$$x(t)=a(1-e^2)\int_0^{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{2\,du}{1+e+(1-e)u^2}=2a\sqrt{1-e^2}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Cela permet d'obtenir : $\tan\left(\frac{t}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{x}{2a\sqrt{1-e^2}}\right)$

et donc :

$$\cos(t)=\frac{1-\tan^2(\frac{t}{2})}{1+\tan^2(\frac{t}{2})}=\frac{1-\frac{1+e}{1-e}\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-e^2}})}{1+\frac{1+e}{1-e}\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-e^2}})}=\frac{1-e-(1+e)\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-e^2}})}{1-e+(1+e)\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-e^2}})}$$

on en déduit :

$$1+e\cos(t)=\frac{(1-e^2)(1+\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-e^2}}))}{1-e+(1+e)\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-e^2}})}=\frac{1-e^2}{(1-e)\cos^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-e^2}})+(1+e)\sin^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-e^2}})}$$

et finalement :

$$1+e\cos(t)=\frac{1-e^2}{1-e\cos(\frac{x}{a\sqrt{1-e^2}})}$$

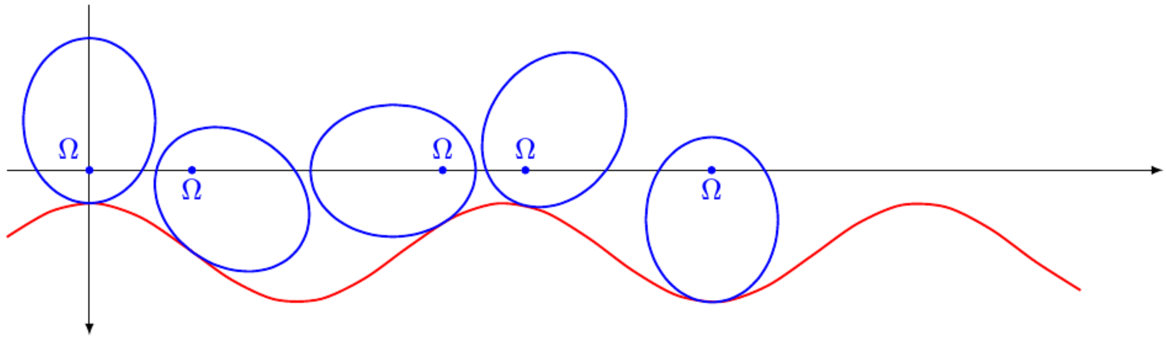
D'où, pour l'équation fonctionnelle de la route :

$$y=r(t)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(t)}=a\left(1-e\cos(\frac{x}{a\sqrt{1-e^2}})\right)=a-c\cos(\frac{x}{b})$$

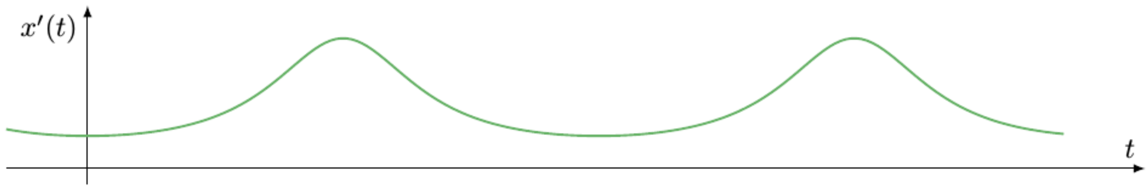
avec b et c les demi-petit-axe et demi-distance-focale de l'ellipse.

La route est une *sinusoïde*.

retour au sommaire



Et le diagramme de vitesse du véhicule est le suivant :



6. Une roue en cardioïde

Imaginons maintenant une roue en forme de *cardioïde* avec son axe au point de rebroussement. Son équation polaire est :

$$r(\theta)=1-\cos(\theta)$$

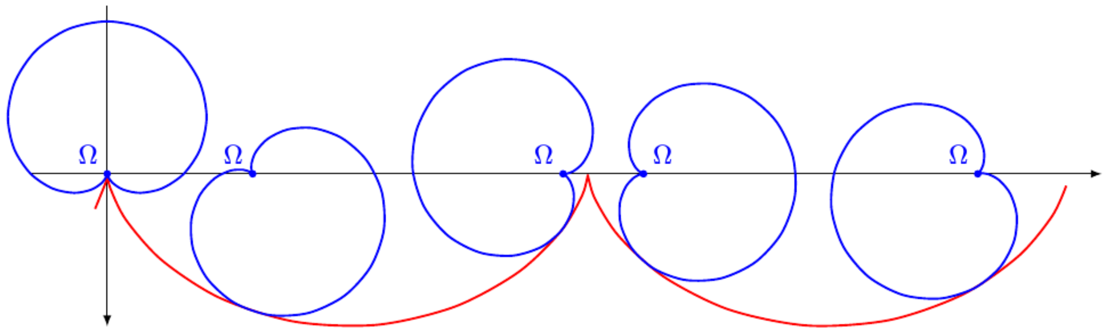
Le calcul de l'abscisse du point de contact ne pose pas de problème insurmontable :

$$x(t)=\int_0^t 1-\cos(v)\,\mathrm{d}v=t-\sin(t)$$

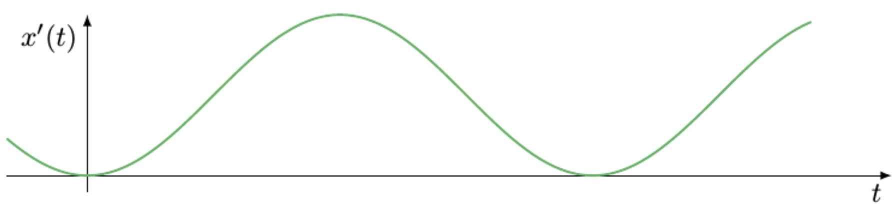
Et l'équation paramétrique de la route est donc :

$$\begin{cases} x(t) &= t-\sin(t) \\ y(t) &= 1-\cos(t) \end{cases}$$

C'est une *cycloïde*.



Et le diagramme de vitesse du véhicule a cette particularité que la vitesse s'annule lorsque le point de rebroussement de la roue (l'axe) passe au point de rebroussement de la route :



retour au sommaire

7. Une roue parabolique

Une *parabole* n'étant pas une courbe fermée, nous allons considérer la roue comme un assemblage de deux paraboles de mêmes paramètres, l'axe étant situé en leur foyer commun.

En accolant deux exemplaires d'une portion de parabole de paramètre 1 définie par l'équation polaire :

$$\begin{cases} r(t)=\dfrac{1}{1+\cos(\theta)} \\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

nous obtenons une roue qui a la forme ci-contre.

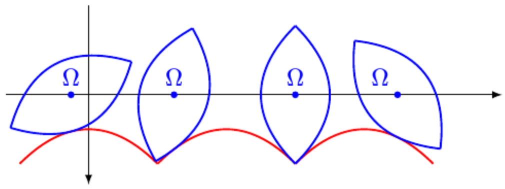
Pour $\dfrac{-\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire un des morceaux paraboliques, nous avons :

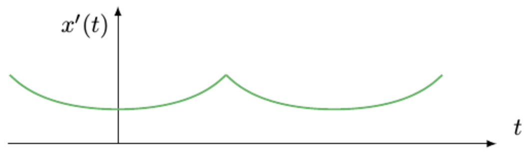
$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{1+\cos(v)}\,\mathrm{d}v=\int_0^t \frac{2}{\cos^2\dfrac{v}{2}}\,\mathrm{d}v=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

De cela nous déduisons que l'équation fonctionnelle de la route est :

$$y=\frac{1}{1+\cos(t)}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}(1+x^2)$$

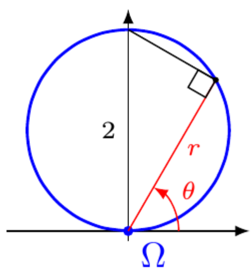
La route est ainsi constituée de portions de parabole de même paramètre que la roue :





8. Et pourquoi pas une roue circulaire ?

L'idée ne semble pas originale . . . sauf si on place l'axe à la circonférence !



L'équation polaire de la roue (de rayon 1) est alors :

$$\begin{cases} r(\theta)=2\sin(\theta)\ \text{pour}\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi \\ r(\theta)=0\ \text{pour}\ \pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$

Sur l'intervalle de temps $[0\,;\,\pi]$ nous avons :

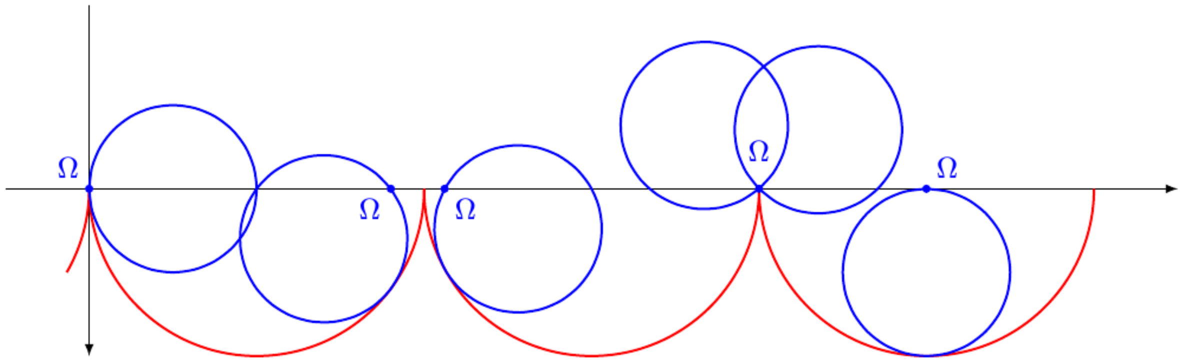
$$x(t)=\int_0^t 2\sin(v)\,\mathrm{d}v=2(1-\cos(t))$$

et sur l'intervalle de temps $[\pi\,;\,2\pi]$ nous avons simplement $x(t)=x(\pi)=4$. L'axe de la roue reste stationnaire sur le point $(4,0)$ pendant tout l'intervalle de temps $[\pi\,;\,2\pi]$.
L'équation de la route sur l'intervalle de temps $[0\,;\,2\pi]$ se résume donc à :

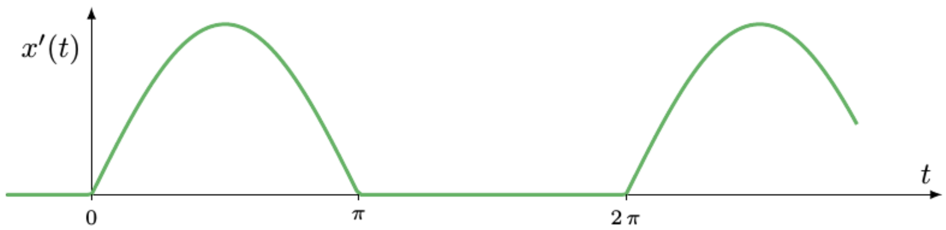
$$\begin{cases} x(t)=2(1-\cos(t)) \\ y(t)=2\sin(t) \\ t\in[0\,;\pi] \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t)=4 \\ y(t)=0 \\ t\in[\pi\,;2\pi] \end{cases}$$

ce qui est un demi-cercle de centre $(2,0)$ et de rayon 2 :

retour au sommaire



La courbe de vitesse en fonction du temps est assez amusante :



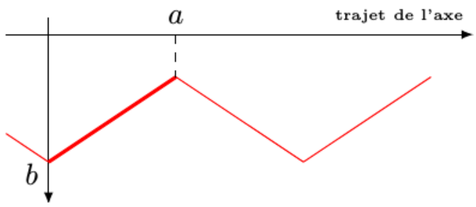
La moitié du temps, le véhicule est arrêté alors que la roue tourne !

9. Une route en dent de scie

Le problème peut se considérer dans l'autre sens en imposant une forme spéciale pour la route.
Si, par exemple, nous voulons adapter une roue a des escaliers dans lequel les marches et contre-marches ont la même dimension, nous devons étudier une route en *dents de scie*. Étudions le cas général. Il nous suffit d'étudier le premier tronçon puis de procéder ensuite par symétries et translations sur la route, et rotations pour la roue, pour propager la chose.

Posons : l'équation du premier morceau (en gras sur la figure).

$$\begin{cases} y=-px+b \\ 0\leqslant x\leqslant a \\ p>0 \\ -pa+b>0 \end{cases}$$

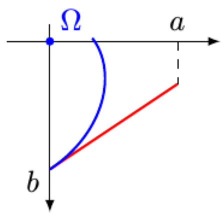


Les équations vues dans la section 2 nous donnent :

$$\begin{cases} r=y=-px+b \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r=b-px \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=-px+b \\ x(t)=\dfrac{b}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pt}\right) \end{cases}$$

Cela nous conduit, en remplaçant x et en se souvenant de la convention $\theta=t$, à l'équation polaire de la portion de roue adaptée :

$$\begin{cases} r(\theta)=b\,\mathrm{e}^{-p\theta} \\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{1}{p}\ln\left(\dfrac{b}{b-pa}\right) \end{cases}$$



c'est un morceau de *spirale logarithmique*.
Revenons à notre escalier dans lequel les marches et contre-marches ont une taille commune L.

La pente de la dent de scie vaut donc $p=1$ et $a=\dfrac{L}{\sqrt{2}}$.

retour au sommaire

Il va falloir raccorder 8 morceaux de spirale logarithmique afin de compléter la roue et cela n'est possible que si la valeur limite de θ vaut $\frac{\pi}{4}$.

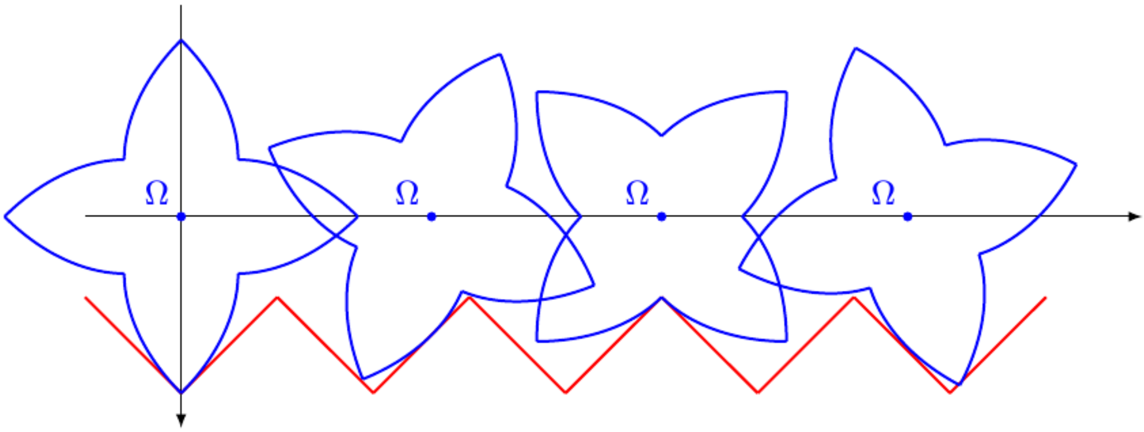
Tout cela conduit aux contraintes suivantes :

$$p=1 \qquad a=\frac{L}{\sqrt{2}} \qquad b=\frac{L}{\sqrt{2}\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}})}$$

et l'équation polaire de la première portion de roue est :

$$r(\theta)=\frac{L\,\mathrm{e}^{-\theta}}{\sqrt{2}\,(1-e^{-\frac{\pi}{4}})} \quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$$

Une symétrie puis une reproduction par quarts de tour nous donnent la roue complète :



Bon . . . il faut quand un type de roue par escalier !

10. Une route en chaînette

Certes, nous avons trouvé qu'une route en chainette convenait à une roue polygonale. Mais qu'advient-il si l'axe doit être à une distance différente du sommet de la chainette ? Le cas est intéressant à étudier.

Imposons à l'axe de suivre, comme d'habitude, la direction des abscisses, mais décalons la portion de chainette [7] en ordonnée en lui donnant comme équation :

$$y=\cosh(x)+\lambda \qquad \lambda>-1 \qquad -1\leq x\leq 1$$

Ce qui nous donne pour l'équation différentielle à variables séparables :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r=y=\cosh(x)+\lambda \Rightarrow \frac{2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+\lambda)^2+1-\lambda^2}=\mathrm{d}t \text{ avec } x=0 \text{ pour } t=0$$

Les calculs sont plutôt velus, mêlant de la trigonométrie directe et réciproque, éventuellement hyperbolique, de la décomposition en éléments simples, du logarithme et autres joyeusetés du même métal.

Je vais me contenter de donner les résultats obtenus, agrémenter de commentaires, mais il nous faut distinguer plusieurs cas.

10.1. Le cas $|\lambda < 1$

L'intégration nous conduit déjà à la jolie formule :

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\times\tan\left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2}t\right)$$

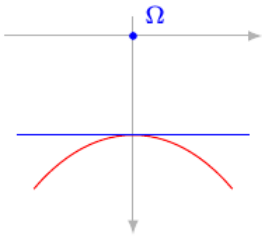
[7] les bornes en x sont arbitraires et peuvent se généraliser

retour au sommaire

avant de nous fournir l'équation polaire de la roue :

$$r(t)=\frac{1-\lambda^2}{\cos\left(\sqrt{(1-\lambda^2)}t\right)-\lambda} \quad \text{avec} \quad |t|\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\arctan t\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\tanh\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

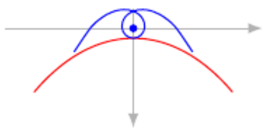
ce qui en jette un peu quand même !



Dans le cas où $\lambda=0$ on retrouve le segment de droite de la section 4 :

$$r(t)=\frac{1}{\cos(t)} \text{ avec } |t|\leq 2\arctan(\tanh(\frac{1}{2}))$$

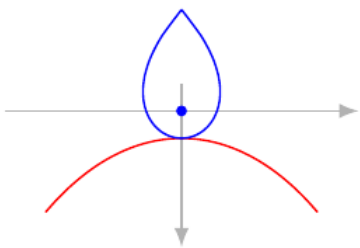
ce qui est plutôt réconfortant !
Pour le reste, l'équation peut faire penser à une conique, mais *que nenni* . . . elles ne sont pas répertoriées.



Lorsque λ côtoie la valeur -1, il se produit un phénomène amusant.
Voilà ci-contre ce qu'on obtient pour $\lambda=-0{,}9$ . . .
C'est pas commun pour une roue !

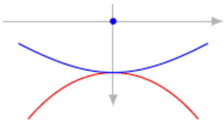
Il faut donc faire en sorte que t ne varie pas dans un intervalle de taille supérieure à 2π. Le paramètre λ doit donc rester supérieur à une valeur limite λ_0 qui vérifie :

$$\frac{2}{\sqrt{1-\lambda_0^2}}\arctan(\sqrt{\frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0}}\tanh(\frac{1}{2}))=\pi$$

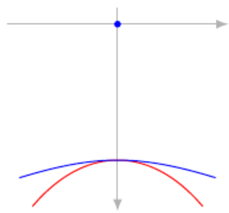


Cette valeur ne peut se déterminer que de façon approchée comme intersection de courbes.
Dans le cas présent, elle vaut $\lambda_0\approx-0{,}798994$ et fournit la roue ci-contre

Pour les autres cas, on notera que la courbure de la roue change avec le signe de λ.
Voici un cas où $\lambda_0<\lambda<0$, $\lambda=-0{,}4$ sur la figure ci-contre.



Et maintenant un cas où $0<\lambda<1$, $\lambda=0{,}6$ sur la figure ci-contre.



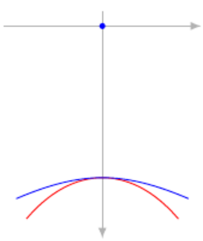
10.2. Le cas $\lambda=1$

L'équation à résoudre est maintenant :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r=y=\cosh(x)+1 \Rightarrow \frac{2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\mathrm{d}t \text{ avec } x=0 \text{ pour } t=0$$

Ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}=\tanh(\frac{x}{2})=t \Rightarrow r(t)=\cosh(x)+1=\frac{1+t^2}{1-t^2}+1$$



D'où l'équation polaire de la roue :

$$r(t)=\frac{2}{1-t^2} \text{ avec } |t|\leq \tanh\left(\frac{1}{2}\right)$$

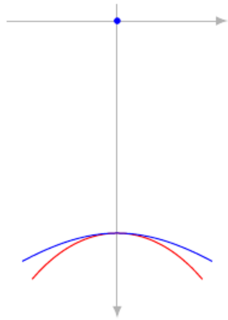
10.3. Le cas $\lambda > 1$

Cette fois les calculs nous mènent à l'expression :

$$\cosh(x)=\frac{\lambda\cosh(t)-1}{\lambda-\cosh(t)}$$

et nous donnent pour équation polaire de la roue :

$$r(t)=\frac{\lambda^2-1}{\lambda-\cosh(\sqrt{\lambda^2-1}\,t)} \text{ avec } |t|\leq\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}\operatorname{argcosh}\left(\frac{\lambda\cosh(1)-1}{\lambda-\cosh(1)}\right)$$



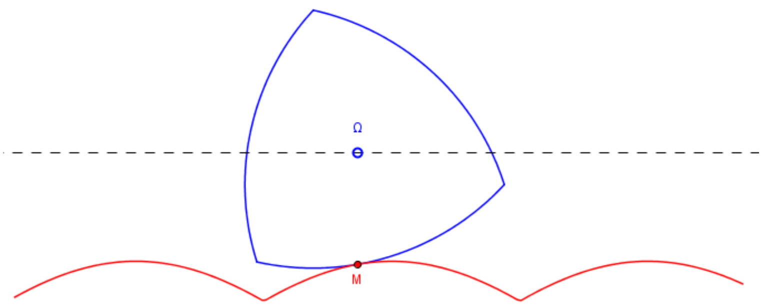
L'exemple ci-contre est réalisé avec la valeur $\lambda=1,5$.

11. En guise de conclusion

Ces quelques exemples ne sont évidemment pas exhaustifs et le jeu peut se poursuivre plus avant . . . pourvu que les intégrales soient calculables !

■

N.D.L.R. Nous vous présentons ci-dessous un extrait d'une animation GeoGebra réalisée par Alain Satabin, qui correspond à la trajectoire d'une roue en forme de triangle de Reuleaux.



Pour obtenir ce fichier GeoGebra, le demander à jacverdier@orange.fr

On vous le disait bien : les maths sont partout...

Vu par Walter à " La ferme des fruitiers" à la Croix du jard, Laitre-sous-Amance (54)

retour au sommaire