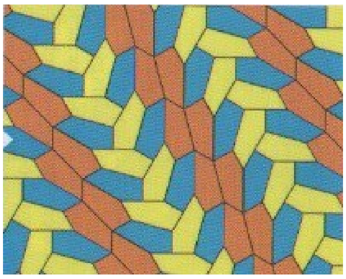
DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°125-a



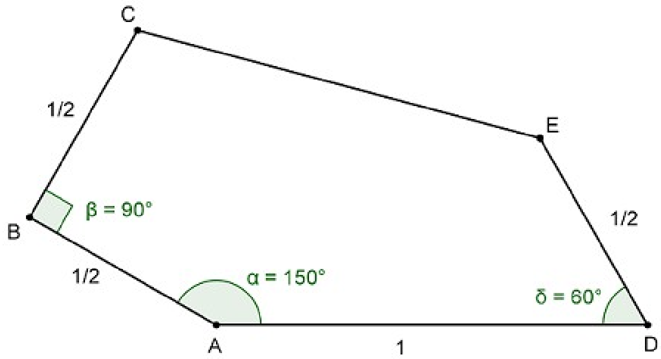
La quinzième « tuile » des pavages pentagonaux

Un pentagone (découvert très récemment, en 2015), permet de « paver le plan » à l'infini (voir image de gauche).

Voici comment le construire.

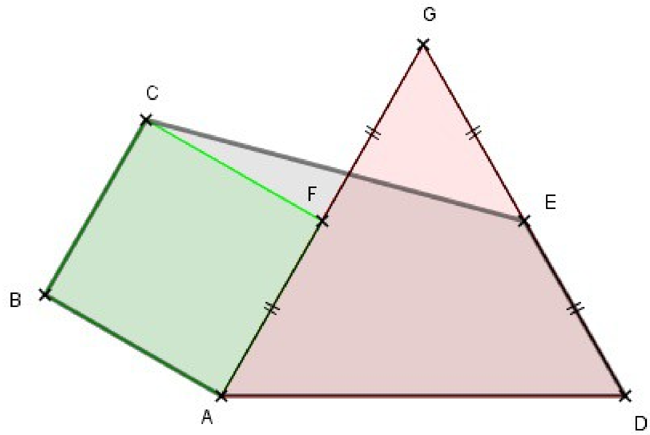
Première construction (voir dessin) :

Un segment AD est pris comme unité.
On construit successivement l'angle DAB de 150° ; le côté AB de longueur ½ ; l'angle ABC droit ; le côté BC de longueur ½ ;
l'angle ADE de 60° ; le côté DE de longueur ½ ;
on joint C et E.
On obtient un pentagone ABCED.



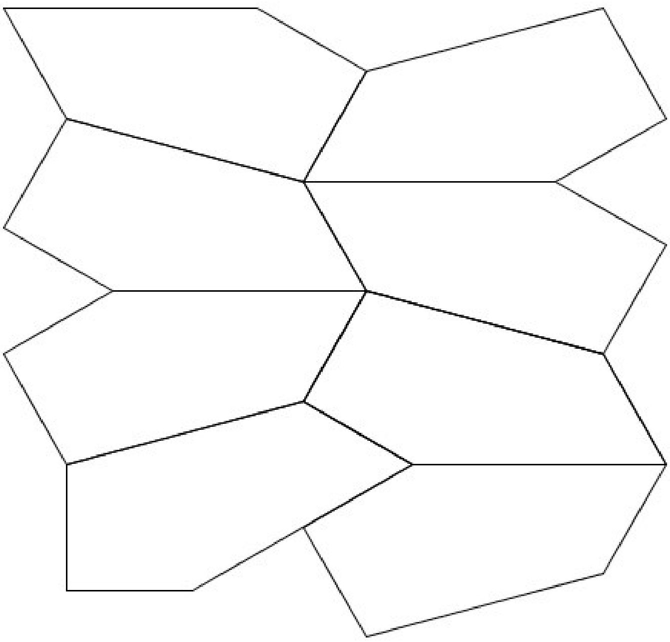
Seconde construction (voir dessin) :

Un segment AD est pris comme unité.
On construit le triangle équilatéral ADG ;
on construit les points F et E milieux de [AG] et [DG] ;
on construit le carré ABCF ;
on joint C et E.
On obtient un pentagone ABCED.



Le défi :

- Pouvez-vous démontrer que ces deux constructions conduisent bien au même polygone ?
- Pouvez-vous calculer la longueur exacte du cinquième côté (CE) ?



En reproduisant les pentagones ci-contre et en les découpant dans du papier de couleur, vous pouvez essayer de faire de jolies figures... Envoyez-nous les plus belles que vous aurez réalisées.

retour au sommaire

DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°125-b

Dans le tableau « Hardy's Taxi » d'Eugen Jost (voir Petit Vert n°124) on trouve ces deux nombres : **1031223314** et **10213223**.

Ces deux nombres ont la particularité suivante : Dans le premier il y a : un 'zéro', trois 'un', deux '2', trois 'trois', un 'quatre', ce que l'on peut énoncer « 1 0, 3 1, 2 2, 3 3, 1 4 ». Le décompte des chiffres doit se faire dans l'ordre : d'abord les '0', puis les '1', les '2' etc. On retrouve bien le nombre 1031223314.

Il en est de même pour le second nombre, 10213223.

Par exemple, si l'on prend comme nombre initial 1, on obtient successivement : 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, 41122314, 31221324, 21322314, 21322314, 21322314... On constate que la suite « stagne » à partir d'un certain moment. Les deux nombres évoqués ci-dessus « stagnent » également.

Le défi

- Tous les nombres initiaux donnent-ils une suite qui finit par « stagner » ?
- Trouver le nombre initial qui permettait d'obtenir 1031223314 et 1031223314.
- Si vous êtes en lycée : écrire un algorithme qui permette, à partir d'un nombre n quelconque, d'écrire la liste des nombres obtenus.

SOLUTION DU DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°124-a

Les bruits qui courent

On dit que... les Glaner gagnent 525 € de plus que les Ferren.
On dit que... M. Glaner gagne 20 % de plus que M. Ferren.
On dit que... Mme. Glaner gagne 30 % de plus que Mme. Ferren.
On dit que... les Ferren gagnent 2250 €.
On dit que... M. Ferren gagne 25 % de plus que son épouse.
Qu'en pensez-vous ? Peut on déterminer le salaire de chacun ?

Eléments de réponse

Il s'avère que les cinq « bruits » sont incompatibles (ils ne peuvent être vrais simultanément).
Notons A le revenu de Mme. Glaner, B celui de M. Glaner, C celui de Mme. Ferren et D celui de M. Ferren.
On a C+D=2250, d'où C+1,25C=2250, d'où C=1000 ; par conséquent D=1250.
D'où A=1,3C = 1300 et B=1,2D=1500, et par conséquent A+B=2800.
Or la première assertion revient à A+B=C+D+525, soit 2800=2250+725=2775.
Il y a contradiction, donc incompatibilité entre ces 5 affirmations.

On peut étudier successivement les cinq cas où l'une (et une seule) de ces affirmations est fausse (donc en se ramenant à chaque fois à un système de 4 équations à 4 inconnues).

- En « éliminant » la première affirmation, on trouve A=1300, B=1500, C=1000 et D=1250.
- En « éliminant » la deuxième affirmation, on trouve A=1300, B=1475, C=1000 et D=1250.
- En « éliminant » la troisième affirmation, on trouve A=1275, B=1500, C=1000 et D=1250.
- En « éliminant » la quatrième affirmation, cela ne « tombe pas juste » ; il y a une solution « arrondie » au centime : A≈1240,91, B≈1431,82, C≈954,55 et D≈1193,18.
- En « éliminant » la cinquième affirmation, on trouve A=975, B=1800, C=750 et D=1500.

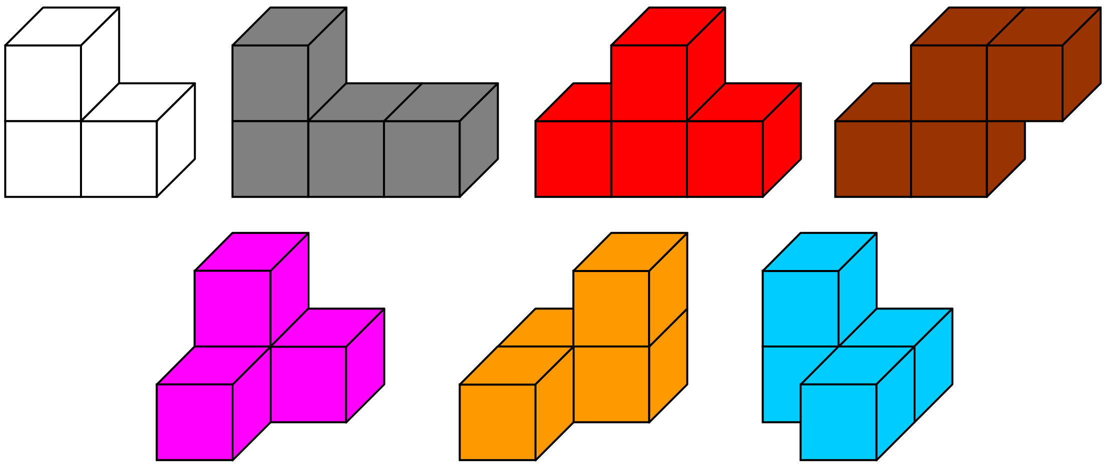
retour au sommaire

SOLUTION DU DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°124-b

Rappel du défi « Des prismes avec les sept pièces du cube Soma »

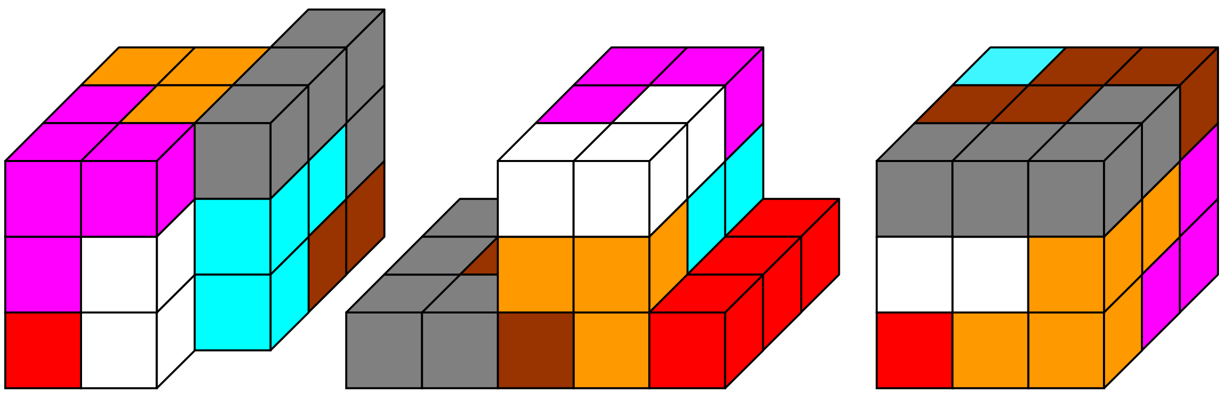
Selon Martin Gardner, pendant un cours de mécanique quantique, le danois Piet Hein aurait inventé ce casse tête en 1936 pendant un cours de mécanique quantique, ne gardant parmi les assemblages de trois ou quatre cubes identiques que ceux qui ne sont pas des pavés droits. Il semblerait que Piet Hein ait déjà déposé un brevet en 1933 : la « légende » racontée par Gardner reste sympathique, le cube Soma a donc au moins 80 ans. http://fr.wikipedia.org/wiki/Cube_Soma

Voici des dessins des sept pièces trouvées.



Piet Hein ayant remarqué qu'elles formaient un assemblage de 27 cubes a réfléchi à la formation d'un cube $3\times3\times3$.

On peut réaliser des prismes en utilisant toutes les pièces, en voici trois exemples.



Le défi proposé

Parmi les prismes droits réalisables avec les sept pièces, comment caractériser ceux dont la longueur totale des arêtes est maximale ?

Comment caractériser ceux dont l'aire totale des faces est maximale ?

La solution

Des éléments de solution, des compléments et de nouvelles idées de recherche, proposés par François Drouin, figurent dans les pages suivantes.

retour au sommaire

Des prismes avec les sept pièces du cube Soma

Dans ce qui suit, l'unité de volume sera le volume d'un cube unitaire, l'unité d'aire sera l'aire d'une face d'un cube unitaire, l'unité de longueur sera la longueur d'une arête d'un cube unitaire.

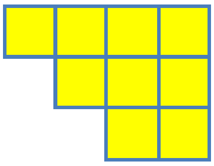
L'utilisation des sept pièces amène à la réalisation de solides de volume 27. Il est facile de se persuader que seuls ces deux cas sont possibles.

Aire de la base	9	3
Hauteur	3	9

Si p est le périmètre d'une face, B l'aire d'une face et h la hauteur, l'aire totale des faces d'un prisme est égale à $2B + p \times h$.

Des prismes d'aire de base égale à 9 et de hauteur égale à 3

La hauteur étant égale à 3, une base est formée de 9 carrés unitaires accolés. Il s'agit donc de caractériser les assemblages de 9 carrés ayant un périmètre maximal.

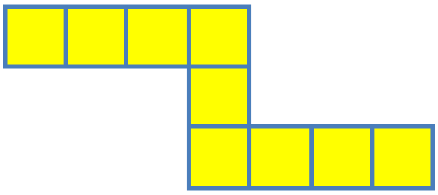


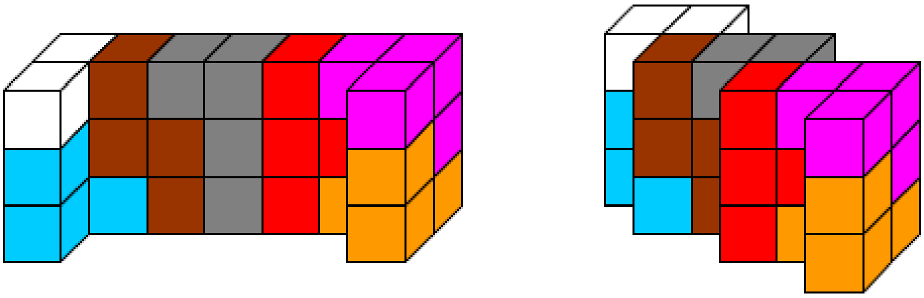
Le périmètre d'un tel assemblage est égal à la somme des périmètres des 9 carrés moins la longueur totale des côté ayant servi aux jonctions.

Pour cet exemple, $p = 9 \times 4 - 2 \times 11 = 14$ (11 est le nombre de jonctions entre les carrés). Pour que p soit maximal, il faut donc que le nombre de jonction soit minimal, c'est à dire 8.

Voici un assemblage de 9 carrés comportant 8 jonctions entre les carrés.

$P = 9 \times 4 - 2 \times 8 = 20$; 20 est donc la valeur maximale de p.

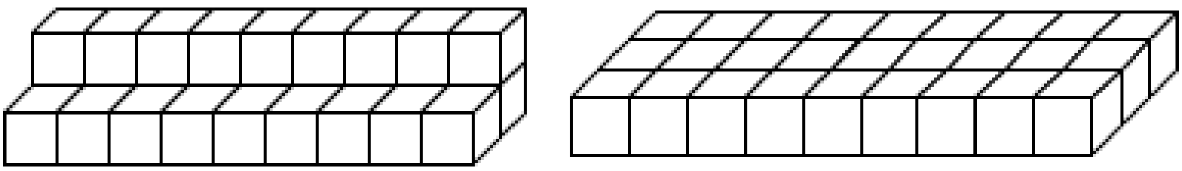




Les sept pièces du cube Soma permettent la réalisation de prismes dont la base correspond au critère évoqué précédemment.

Pour les prismes de hauteur 3, le maximum pour l'aire totale des faces est donc 78.

Des prismes d'aire de base égale à 3 et de hauteur égale à 9



prisme 1 prisme 2

Ces deux prismes sont les seuls pouvant être construits avec les 27 cubes assemblés. L'aire totale de leurs faces est égale à 78. Ils répondent à la variante du défi.

Les utilisateurs des pièces du cube Soma se persuaderont facilement que le prisme 2 n'est pas constructible avec les sept pièces.

Concernant le prisme 1, voici sous forme d'un tableau une preuve de sa non-constructibilité rédigée suite à des échanges avec deux lecteurs du Petit Vert.

Il y a 9 tranches verticales de 3 cubes dans le prisme. La pièce rose remplit une tranche entière. Plaçons le 4ème cube rose à gauche de la tranche entière. Sur ce 4ème cube quelle pièce peut-on placer ?

retour au sommaire

Au dessus du cube rose	Couleur du cube devant le rose (donc pièce)	Suite du raisonnement		Conclusion
« Bleu »				Impossible car emplacement vide d'un seul cube devant.
« orange »				Impossible car emplacement vide d'un seul cube devant.
« marron »	Impossible car une ligne de 3 cubes devant			
« rouge »	« gris » obligé	Scindage en 2 prismes	Impossible avec « orange « bleu » « marron » « blanc »	Si « orange » n'est pas une base de ce prisme, ce prisme est scindable en deux prismes plus petits…Impossible. « orange » ne peut donc qu'être une base.
« gris	« rouge »	Scindage en 2 prismes	Impossible avec « orange » « bleu » « marron » « blanc »	Si orange n'est pas une base de ce prisme, ce prisme est scindable en deux prismes plus petits…impossible. « orange » ne peut donc qu'être une base.
	Blanc*	Devant « gris », « marron »	On ne peut combler les 2 cubes au-dessus de « marron »	
		Devant « gris » « orange »	Impose prisme avec « orange » « rouge » « marron »	Impossible.
		Devant « gris » « rouge »	Impose « marron » devant « rouge »	« bleu » et « orange » devant le cube « marron » crée un cube vide au-dessus
« blanc »	« Noir » devant	Au dessus de « gris », « marron »	On ne peut combler les 2 cubes devant « marron »	
		Au dessus de « gris » « bleu »	Impose un prisme avec « orange » « rouge » « marron »	Impossible
		Au dessus de « noir » « rouge »	Impose « marron » devant « rouge »	« bleu » et « orange » sur le cube « marron » crée un cube vide devant comme première ligne

…/…

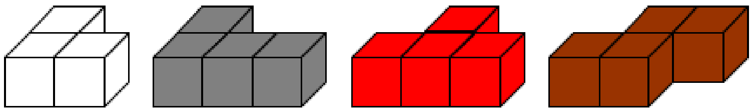
retour au sommaire

Pour des prismes de longueur totale des arêtes maximale

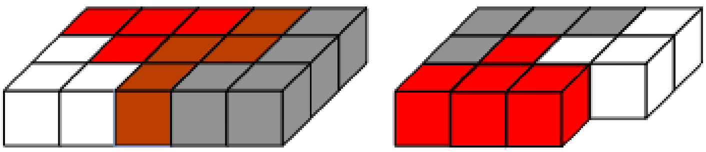
Cette recherche aurait pu également faire l'objet d'un défi proposé aux lecteurs utilisateurs des sept pièces du cube Soma ou des 27 cubes.
Une première difficulté est apparue pour les prismes de hauteur égale à 3 et donc de base formée de 9 carrés accolés. Sachant qu'un polygone a autant de sommets que de côtés, si n est le nombre de côtés de la base, si p est le périmètre d'une base, la longueur des arêtes du prisme est égale à $3n + 2p$. La recherche de l'aire maximale des faces nous a montré que 20 est la valeur maximale de p.
Le nombre n de sommets est à optimiser dans la formule $3n + 2p$ et nous amène à la question « Quel est le nombre maximum de sommets d'un polymino formé de 9 carrés accolés par des côtés entiers ? ». Il existe 1285 « ennéaminos ». Faute d'avoir dénombré les sommets de chacun, ce problème reste ouvert.

Des prismes en n'utilisant que certaines pièces formant le cube Soma

Des prismes de hauteur égale à 1

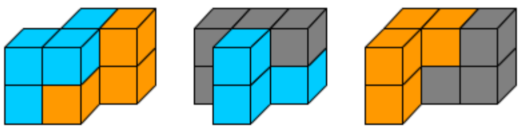


Seules ces quatre pièces sont des prismes droits. Leur hauteur est égale à 1.



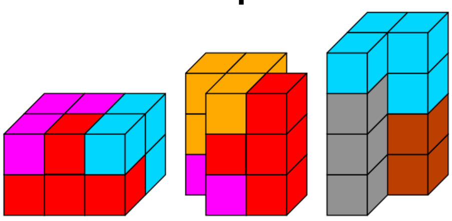
Des assemblages « plats » de certaines de ces quatre pièces forment des prismes de hauteur 1 tels que ceux dessinés ci-contre. Il y en a d'autres, bien sûr.
Le premier dessiné est celui qui utilise les quatre pièces proposées et est le seul parallélépipède réalisable. Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux prismes de hauteur au moins égale à 2.

Avec deux pièces



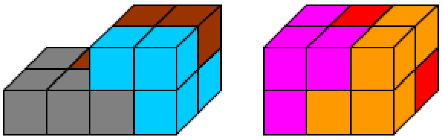
Réussirez-vous à prouver qu'il n'existe pas d'autres prismes droits de hauteur égale à 2 et formés de deux pièces du cube Soma ?

Avec trois pièces

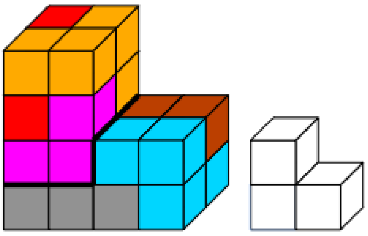


Il existe d'autres prismes droits formés de trois pièces du cube Soma.
Les deux premiers prismes peuvent être construits en remplaçant la pièce orange par la pièce bleue. Chaque fois qu'on a une solution utilisant la pièce bleue ou la pièce orange, on a aussi la construction symétrique en échangeant ces deux couleurs.
Trouverez-vous d'autres prismes droits formés de trois pièces du cube Soma ?

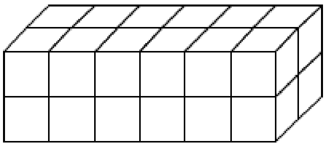
Avec six pièces



L'assemblage de ces deux prismes construits chacun avec 3 pièces permet la réalisation de nombreux prismes construits avec les six pièces.



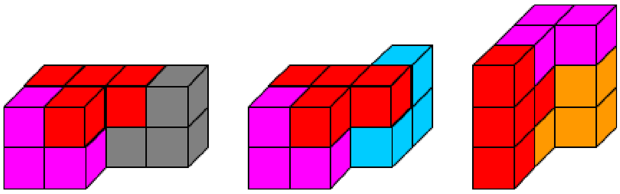
Remarque: Cet exemple est la construction « échelle 2 » de la pièce non utilisée.



Ce prisme formé de 24 cubes est-il réalisable avec 6 des pièces du cube Soma ?

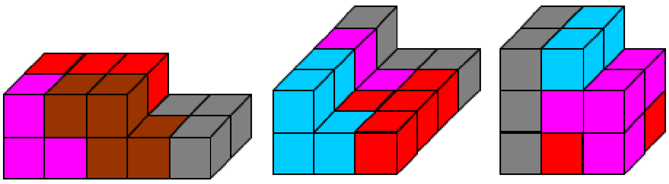
Quelques prismes supplémentaires

Avec trois pièces

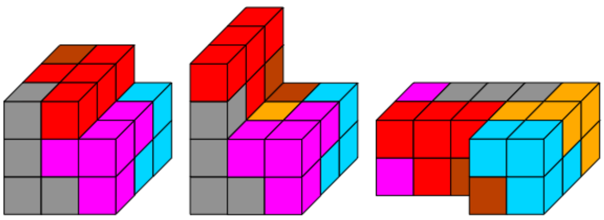


Des prismes repérés dans la brochure « Jeux 5 »

Avec 4 pièces



Avec 6 pièces

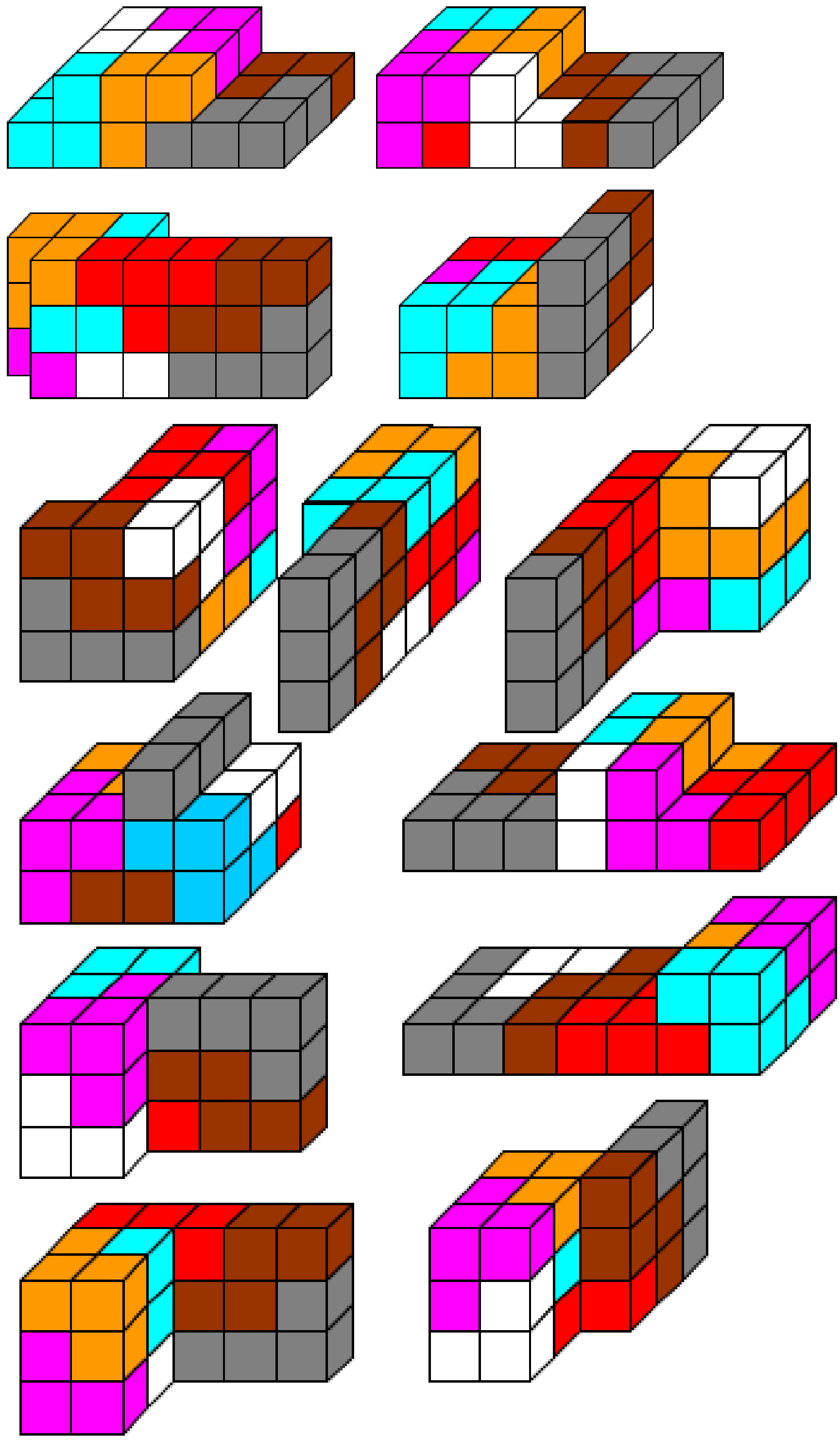


…/…

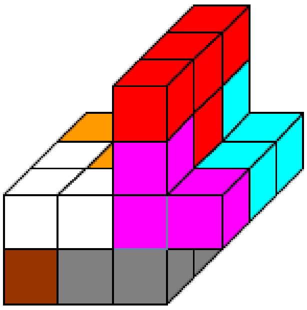
retour au sommaire

Avec 7 pièces

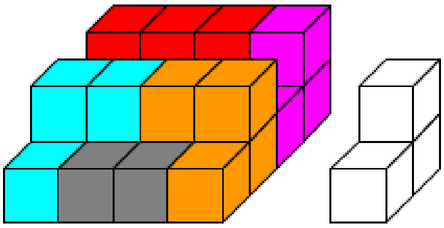
Voici d'autres exemples extraits d'une des brochures d'accompagnement de l'exposition « Objets mathématiques » réalisée par la régionale A.P.M.E.P. Lorraine. Ils font partie d'une recherche à propos de parallélépipèdes accolés réalisés avec les sept pièces formant le cube Soma.



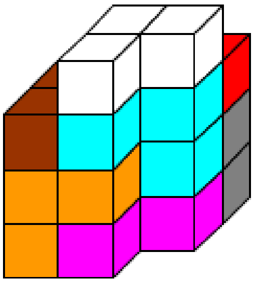
Trois réalisations d'élèves du collège de Saint-Mihiel complètent les propositions précédentes.



Le bidule de Karim



Neuf petits sièges



Une colonne

Le « bidule de Karim » est un prisme. Les « neuf petits sièges » sont formés de deux prismes. La « colonne » peut donner envie de lancer une recherche à propos de solides formés de deux prismes accolés.

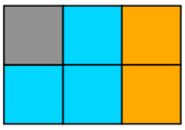
D'autres propositions

Sauriez-vous reconstruire ces prismes en utilisant les indications fournies par un lecteur du Petit Vert ?

Avec trois pièces

Un pavé est construit. D'autres prismes sont obtenus en faisant pivoter la pièce grise.

Une face du pavé



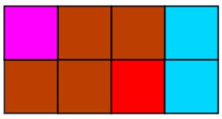
La hauteur du prisme est 4.

Une des faces du prisme

Avec quatre pièces

Un premier prisme est obtenu en accolant la pièce blanche au prisme de hauteur 4 construit avec les trois pièces.

Un pavé est construit.
Une face du pavé



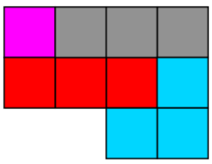
La hauteur du prisme est 5.
Une des faces du prisme

Remarque : le pavé peut être aussi construit en remplaçant la pièce bleue par la pièce orange.

Avec cinq pièces

Les pièces rose, grise, rouge, marron et bleue sont utilisées.

Une base du prisme



Remarque : un prisme peut être aussi construit en remplaçant la pièce bleue par la pièce orange.

.../...

Le comité de rédaction du Petit Vert est preneur de réponses (complètes ou incomplètes) aux nouvelles idées de recherche évoquées dans cet article ainsi de dessins ou de photos d'autres prismes obtenus.

Sitographie

http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM Le site incontournable !

Ressources APMEP

http://apmeplorraine.fr/old/ L'ancien site de notre régionale est de nouveau accessible.
http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=coinjeux&choix=2
Des documents à propos du cube Soma.
http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=coinjeux&choix=5
Les documents complémentaires au stand n°16 de notre exposition itinérante.
http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=petitvert&page=archive_pv
Pour télécharger les Petits Verts 48 et 85 et y retrouver les articles écrits pour les 60$^{\text{ème}}$ et 70$^{\text{ème}}$ anniversaire du cube Soma.
http://www.apmep.tlse.free.fr/spip/spip.php?article36
Sur le site de la régionale de Toulouse, des documents fournis à la suite d'un stage « Jeux ».
http://www.apmep.fr/IMG/pdf/PAGANO_Cube_SOMA_1.pdf
Pour rechercher des prismes droits parmi les solides proposés.
Le jeu de « Dominos » présenté dans l'article « 2006 : Les 70 ans du cube SOMA » (Bulletin de l'APMEP n°461, pages 725 à 729) peut être demandé en écrivant à l'adresse contact de la régionale contact@apmeplorraine.fr.

MATHS ET JEUX

Solution du sudoku paru dans le PV124

R	T	O	L	U	E	K	D	G
D	K	G	T	R	O	U	L	E
L	U	E	K	D	G	R	T	O
G	E	R	U	O	L	T	K	D
T	O	L	D	K	R	G	E	U
K	D	U	E	G	T	O	R	L
E	G	T	R	L	U	D	O	K
U	L	K	O	T	D	E	G	R
O	R	D	G	E	K	L	U	T

Le mathématicien à trouver était Kurt Gödel.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del
http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/a/article-godel-dechire-22400.php