

DES DEFIS POUR NOS ELEVES**DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°124a****Les bruits qui courent**

On dit que... les Glaner gagnent 525 € de plus que les Ferren.
On dit que... M. Glaner gagne 20 % de plus que M. Ferren.
On dit que... Mme. Glaner gagne 30 % de plus que Mme. Ferren.
On dit que... les Ferren gagnent 2250 €.
On dit que... M. Ferren gagne 25 % de plus que son épouse.

Qu'en pensez-vous ? Peut-on déterminer le salaire de chacun ?

Il s'avère que l'un de ces cinq « bruits qui courent » est faux. Peut-on alors déterminer le salaire de chacun ?

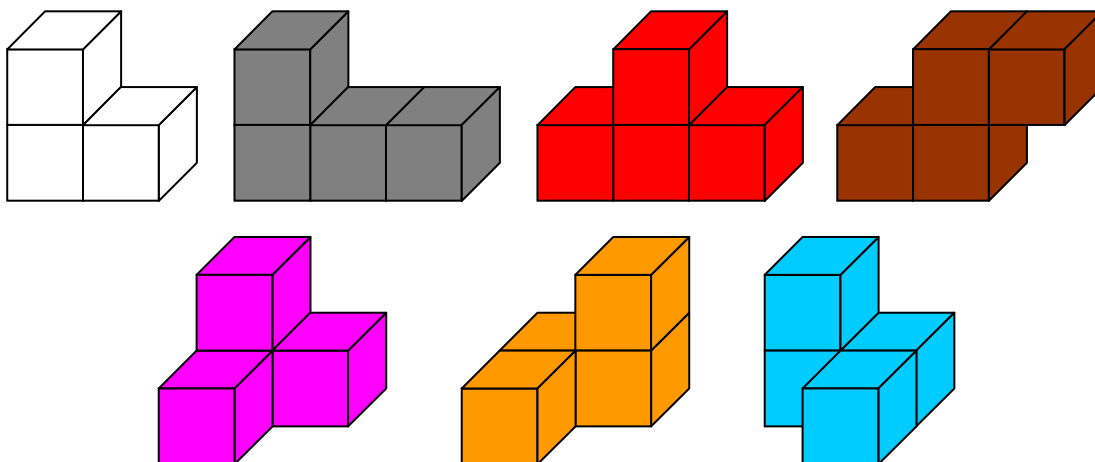
Envoyez vos solutions à [Michel Ruiba](#).

Ce défi est extrait de la brochure « Démarche de recherche... ». Les données ont été actualisées.
<http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/ALO/ALO86001/ALO86001.pdf>

DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°124b**Des prismes avec les sept pièces du cube Soma**

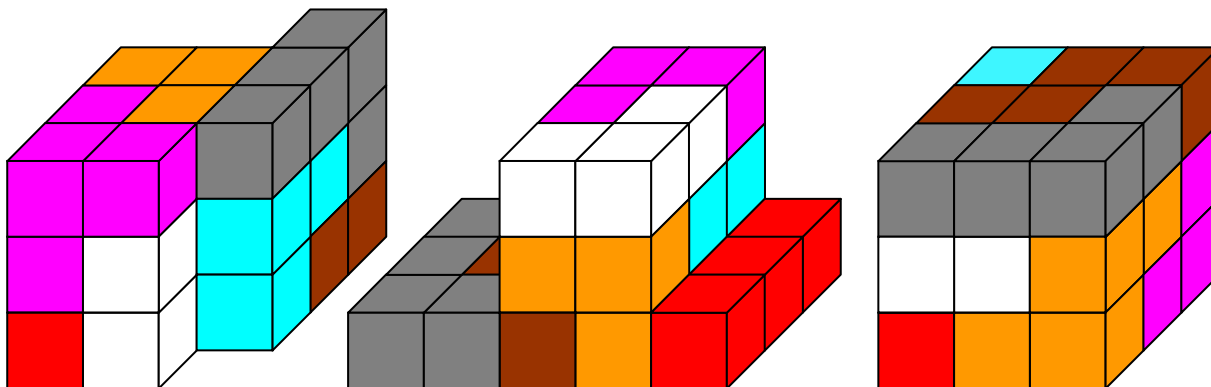
Selon Martin Gardner, le danois Piet Hein aurait inventé ce casse tête en 1936 pendant un cours de mécanique quantique, ne gardant parmi les assemblages de trois ou quatre cubes identiques que ceux qui ne sont pas des pavés droits. Il semblerait que Piet Hein ait déjà déposé un brevet en 1933 : la « légende » racontée par Gardner reste sympathique, le cube Soma a donc au moins 80 ans. http://fr.wikipedia.org/wiki/Cube_Soma

Voici des dessins des sept pièces trouvées.



Piet Hein ayant remarqué qu'elles formaient un assemblage de 27 cubes a réfléchi à la formation d'un cube $3 \times 3 \times 3$.

On peut réaliser des prismes en utilisant toutes les pièces, en voici trois exemples.



Le défi : Parmi les prismes droits réalisables avec les sept pièces, comment caractériser ceux dont la longueur totale des arêtes est maximale ?

Comment caractériser ceux dont l'aire totale des faces est maximale ?

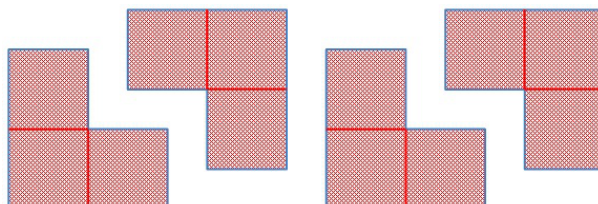
Aide éventuelle : Par exemple, dans le prisme de droite ci-dessus (qui est un cube), la longueur totale des arêtes est de 36 unités (12 arêtes de 3 unités), et l'aire totale est de 54 unités (6 faces de 9 unités).

Envoyez vos propositions de solutions à [François Drouin](#).

SOLUTION DES DÉFIS DU n°123

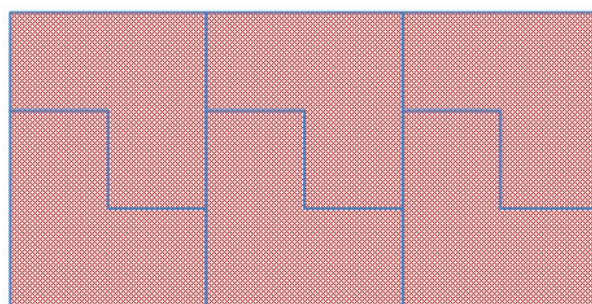
Défi collège : Rectangles et « Petits L »

Rappel de l'énoncé : on dispose de nombreux « Petits L » semblables à ceux dessinés ci-contre.

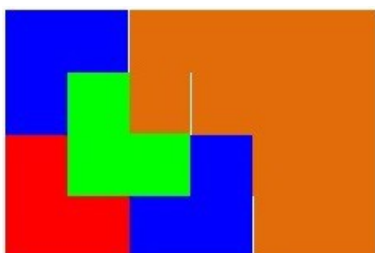


Six « Petits L » permettent la réalisation d'un rectangle dans lequel sont visibles trois rectangles 3×2 formés de deux pièces assemblées.

En assemblant des « Petits L », est-il possible de construire un rectangle dans lequel ne sera visible aucun rectangle 3×2 formé de deux pièces assemblées ?



Solution



Un « Petit L » dessiné à l'échelle 2 peut être recouvert par quatre « Petits L » à l'échelle 1. Deux exemplaires de ce recouvrement fournissent un rectangle 6×4 dans lequel n'est visible aucun rectangle 3×2 formé de deux pièces assemblées. Ces rectangles peuvent s'assembler pour former d'autres rectangles qui répondent au défi proposé. Il existe donc une infinité de rectangles qui répondent au défi posé.

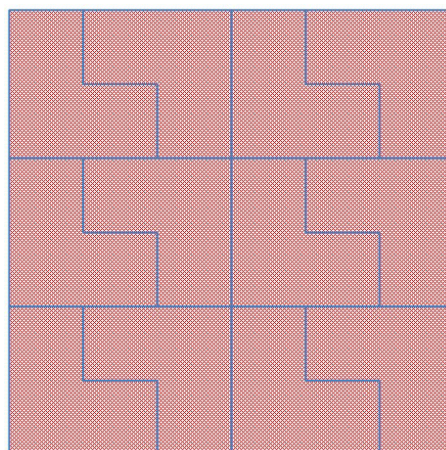
Un nouveau défi apparaît alors : prouver qu'il faut au moins huit pièces pour construire un rectangle solution. L'étude systématique des rectangles d'aire inférieure à 24 et pour laquelle une des dimensions est un multiple de 3 pourra convaincre les lecteurs.

Défi lycée : Carrés et « Petits L »

Rappel de l'énoncé : On dispose de nombreux « Petits L » semblables à ceux dessinés ci-dessus.

Le carré 6×6 ci-contre est aisément recouvert avec douze « Petits L ».

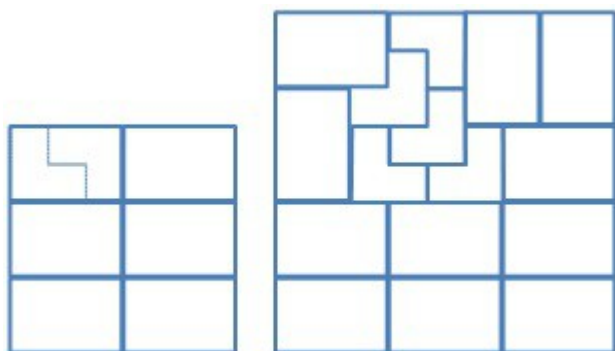
Mais comment peut-on caractériser les carrés recouvrables par des « Petits L » ?



Solution

Si n est le côté du carré, son aire est n^2 . n^2 doit être un multiple de 3, il faut donc que n soit un multiple de 3 pour espérer le recouvrement du carré par des « Petits L ».

Au vu du cas « $n = 3$ », il est clair que cette condition n'est pas suffisante car le carré 3×3 ci-contre ne peut pas être recouvert par des « Petits L ».



Les carrés 6×6 et 9×9 peuvent être recouverts par des « Petits L ».

Tout côté de carré multiple de 3 plus grand que 9 peut s'écrire sous la forme $c = 3n + 6$.

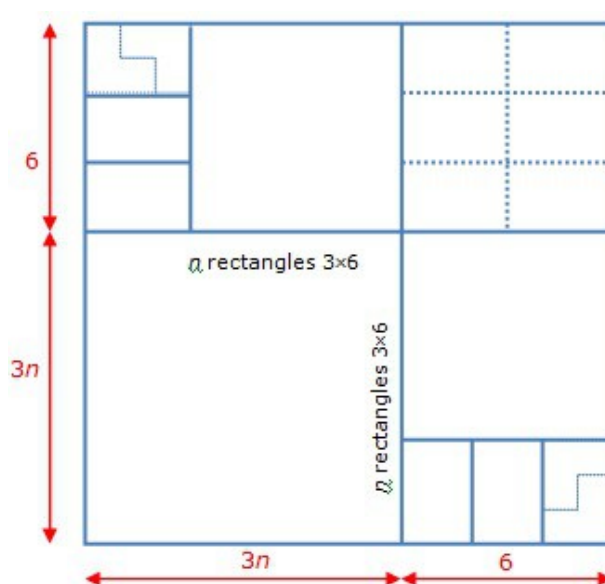
Le dessin ci-contre montre comment découper le carré pour réussir à le recouvrir.

Puisque les carrés de côté 6 et 9 sont recouvrables, on en déduit la faisabilité pour ceux de côté « $6 + 6 = 12$ », « $9 + 6 = 15$ » ; puis pour ceux de côté « $12 + 6 = 18$ » et « $15 + 6 = 21$ », etc.

Tout carré de côté multiple de 3 (autre que 3) fait partie soit de la famille issue du carré de côté 6, soit de la famille issue du carré de côté 9.

Tout carré de côté multiple de 3 (autre que 3) est donc recouvrable par des « Petits L ».

« Avoir un côté multiple de 3 et au moins égal à 6 » caractérise donc les carrés recouvrables par des « Petits L ».



Voir également le problème publié dans le Petit Vert n° 36 :

http://apmeplorraine.fr/old/index.php?action=telecharger_pv&pv_id=36 (page 23)

et sa solution dans le Petit Vert n° 37 :

http://apmeplorraine.fr/old/index.php?action=telecharger_pv&pv_id=37 (page 18)

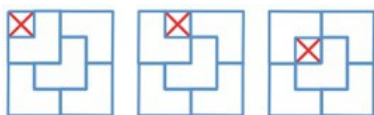
Compléments au défi lycée n°123

Des carrés « presque recouverts » par des « Petits L »



Le carré 2×2 ne peut pas être recouvert par un « Petit L ».

Une case reste libre. $2 \times 2 - 1 = 3$.

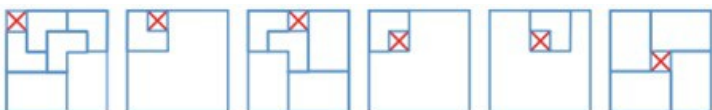


$4 \times 4 - 1 = 15$.

Cela donne envie d'utiliser cinq « Petits L » : La case vide aura trois positions possibles, les autres cases peuvent être recouvertes par des « Petits L ».

Cette situation peut-elle se généraliser à tous les carrés de côté non multiple de 3 ?

Un entier non multiple de 3 peut s'écrire « $3n + 1$ » ou « $3n + 2$ ». Élevé au carré, il s'écrira « $9n^2 + 6n + 1$ » ou « $9n^2 + 12n + 4$ ». Si une case reste vide, le nombre de cases à recouvrir sera « $9n^2 + 6n$ » ou « $9n^2 + 12n + 3$ ». Dans les deux cas, un multiple de 3 est obtenu, ce qui laisse espérer un recouvrement par des « Petits L ».

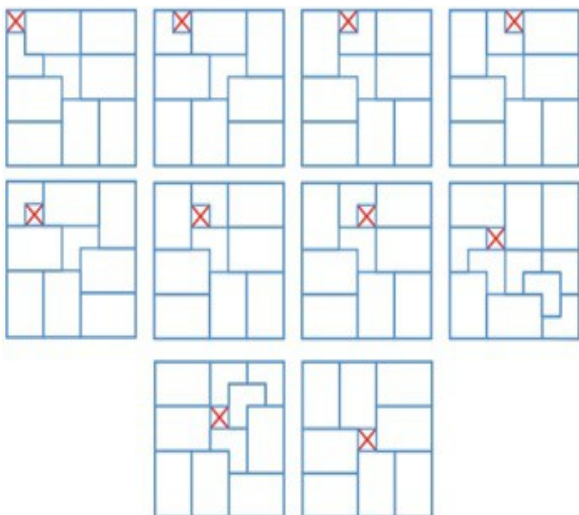


A une symétrie ou une rotation près du carré 5×5 , la case laissée vide a six positions possibles. Seules trois d'entre

elles amènent à un recouvrement des cases restantes par des « Petits L ».

Il est aisé de se convaincre que les rectangles 3×2 dessinés sont recouvrables par deux « Petits L ».

Il est également aisé de se convaincre que les carrés 6×6 dessinés sont recouvrables par des rectangles 3×2 , donc par des « Petits L ».



A une symétrie ou une rotation près du carré 7×7 , la case laissée vide a dix positions possibles. Toutes amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».

A une symétrie ou une rotation près du carré 8×8 , dix positions sont possibles pour la case laissée vide. Toutes amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».

La recherche pourrait se poursuivre pour des carrés plus grands et pour éventuellement une généralisation...

