MATHS ET T.U.I.C.
(Techniques usuelles de l'information et de la communication)

GeoGebra et le cercle de van Lamoen

Par Noël LAMBERT
Article déjà publié dans Mathematice

Il n'est pas question pour moi de présenter une activité élève toute faite, surtout qu'elle ne pourra se conclure par une démonstration. Disons que cet article n'est qu'un prétexte pour faire une courte promenade dans GeoGebra et vous présenter quelques unes de ses fonctionnalités. Le fichier que vous pourrez télécharger en suivant le lien indiqué en fin d'article est donc construit « côté prof ».
(Note de lecture du document original, chaque outil, chaque commande est associé, au moment de sa première citation, à un hyperlien vous permettant d'ouvrir, dans votre navigateur, sa page de référence dans le manuel officiel GeoGebra, l' est encad icône bleu, la commande soulignée en bleu. Les saisies surlignées peuvent être copiées et collées dans le champ Saisie, et seront exécutées, tout du moins si leurs arguments ont bien été créés auparavant).

Les programmes de mathématiques font appel à la notion de **cercle circonscrit à un triangle** dès la classe de 5ème.

Des manipulations de départ amènent à visualiser ce qu'il en est dans des cas particuliers : triangle rectangle, triangle équilatéral, et pourquoi ne pas combiner les 2 ? Lorsque je réalise la construction dans un triangle équilatéral, je fais apparaître son découpage en 6 triangles rectangles ayant 2 par 2 leur hypoténuse en commun ; si je construis maintenant les centres des cercles circonscrits à ces petits triangles, je ne vais donc n'obtenir que 3 points, évidemment non alignés, donc cocycliques !

Si je considère maintenant un triangle quelconque, et que j'en construise les médianes (là j'ai un peu peur que chez certains élèves, se crée une confusion médiane/médiatrice dans la construction du cercle circonscrit) pour le partager en 6 petits triangles, que va t-il se passer pour leurs centres de cercle circonscrit ?

La réponse a été donnée « récemment » par le mathématicien néerlandais Floor van Lamoen : ces 6 points sont cocycliques !

Rappel : Dans toute construction, afin de ne pas surcharger la figure, fermer la fenêtre Algèbre ou
Menu > Options > Étiquetage > Seulement les nouveaux points

Outils et commandes

Construction du cercle circonscrit à un triangle et de son centre :

		Rmq1				Rmq1			
Rmq2		Rmq2							

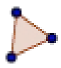
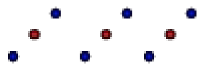
retour au sommaire

Remarque 1 : Après sélection de l'outil Intersection, cliquer successivement sur les 2 cercles pour obtenir d'un coup les 2 points d'intersection.
Rappel ? Ces 2 points étant sélectionnés, vous pouvez, dans leurs propriétés (clic-droit) Onglet « Basique », cocher « Afficher tracés d'intersections » pour ne conserver des cercles, en affichage, que des arcs.
Remarque 2 : L'outil MilieuCentre permet de sélectionner aussi bien un segment que ses 2 extrémités.

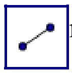
Cette dernière variante correspond en saisie à:
cercle=Cercle[A, B, C] suivie de O=Centre[*cercle*]
Mais je veux aussi parler d'une commande TriangleCentre[<Point>, <Point>, <Point>, <Nombre>]
pour *Nombre= 3,* vous créez le centre du cercle circonscrit au triangle construit sur les 3 points cités, (et pour *Nombre= 1153,* vous créez le centre du cercle de van Lamoen de ce triangle).
Donc pour reprendre dans l'historique Point > Cercle la dernière variante :
O=TriangleCentre[A,B,C,3] suivie de cercle=Cercle[O, A].

« Mon » protocole de construction

Créer un triangle, ses médianes, les centres des cercles circonscrits aux 6 « petits » triangles, chacun ses outils ou ses commandes.

Je crée à la volée un triangle  et les milieux de ses côtés 

Je mets la charrue avant les bœufs, pour reparler de la commande TriangleCentre, je crée d'abord le centre de gravité G en validant TriangleCentre[A,B,C,2]

et ensuite les côtés des « petits » triangles, sans utiliser 3 ou 6 fois  mais en évoquant la commande

Compactée[<Expression>, <Var1>, <Liste1>, <Var2>, <Liste2>, ...]

Segments=Compactée[Segment[G, M], M, {A, D, B, E, C, F}]

Rappel : Il est facile de se créer une liste d'objets affichés, maintenir la touche « Alt » enfoncée, et décrire un rectangle de sélection, bouton gauche enfoncé, sur la partie de la fenêtre Graphique contenant vos objets, lorsque vous relâchez le bouton, la liste apparaît dans le champ de saisie, reste à la corriger éventuellement, et à la valider.

Création des centres des cercles circonscrits aux 6 « petits » triangles :

Centres=Compactée[TriangleCentre[G, M, N, 3], M, {A, D, B, E, C, F}, N, {D, B, E, C, F, A}]

et pour créer les cercles circonscrits aux 6 « petits » triangles :

Cercles=Compactée[Cercle[M, N], M, Centres, N, {A, B, B, C, C, A}]

J'ai délibérément utilisé la commande Compactée, pour réaliser des actions répétitives, j'aurais aussi pu utiliser les commandes Séquence ou Exécute (je suis de plus en plus réticent pour utiliser cette dernière, il y a eu rétropédalage, maintenant elle ne fonctionne plus qu'avec les commandes écrites en anglais!) et aussi le tableur !

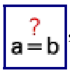
Ah zut, les centres n'ont pas été nommés, ils ne peuvent donc être sélectionnés directement par leur nom, mais par l'intermédiaire de la commande Elément[<Liste>, <Position n>], c'est l'occasion justement de vous indiquer une petite manipulation. Ouvrez le tableur et la fenêtre Algèbre, sélectionnez la liste *Centres* et faites un glisser/déposer dans la cellule C1 (ici, en maintenant la touche Maj enfoncée – sinon la liste va être copiée en ligne), GeoGebra (qui n'est pas avare en constructions, c'est un reproche que d'aucuns lui font) va créer 6 points C1 … C6.

Vos 6 centres ont maintenant un nom, reste à savoir s'ils sont cocycliques.

retour au sommaire

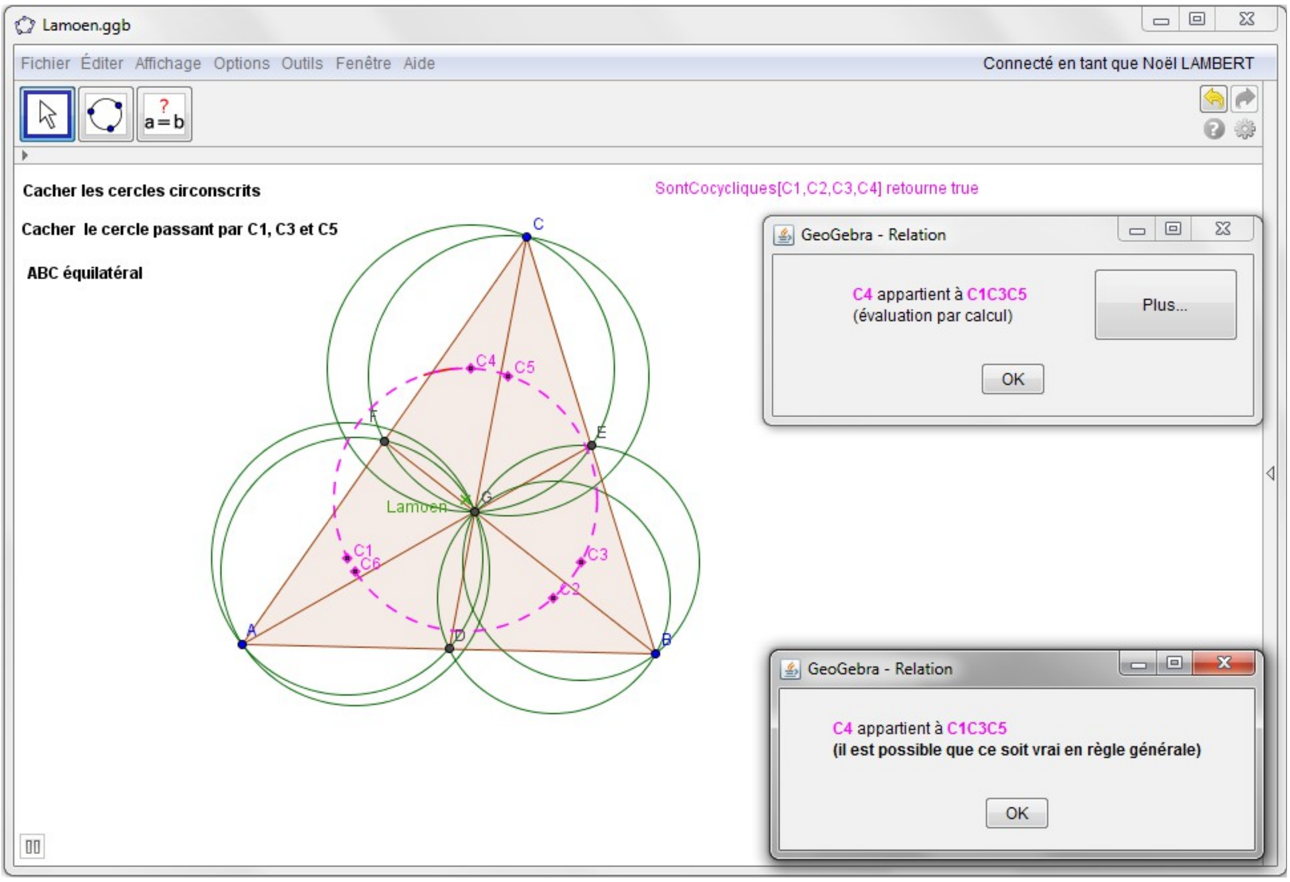
Autour des relations

GeoGebra possède un certain nombre de commandes **Sont**..., en ce qui nous concerne : SontCocycliques[<Point>, <Point>, <Point>, <Point>], si vous validez Cocy=SontCocycliques[C1, C2, C3, C4] vous allez voir apparaître dans la fenêtre Algèbre, dans le paragraphe « Booléen » Cocy=true, eh oui, même en voulant avoir toubon :-) les valeurs *true*(vrai) et *false*(faux) pour un booléen resteront en anglais. Vous pouvez réitérer pour C5 et C6 à la place de C4 et conclure sous la foi de GeoGebra que les points C4, C5 et C6 appartenant tous au cercle passant par C1, C2 et C3, ces 6 points sont cocycliques.

Il vous possible aussi d'utiliser 

, créons d'abord un cercle C1C3C5=Cercle[C1, C3, C5] passant par 3 des centres, sélectionnons l'outil et cliquons sur ce cercle et par exemple C4, une fenêtre s'ouvre, nous précisant que « C4 appartient à C1C3C5 (évaluation par calcul) », GeoGebra a calculé que les coordonnées de C4 vérifient l'équation du cercle C1C3C5. Il est un bouton « Plus ... », en le sollicitant, GeoGebra nous précise, « humblement » qu'**il est possible que ce soit vrai en règle générale**. C'est à dire que dans l'état actuel de ses connaissances, la cocyclicité (ce n'est pas dans le dictionnaire ?) des 4, donc des 6 points ne ferait aucun doute, mais bien sûr, il ne nous en fait pas la démonstration.

L'équivalent en saisie est Relation[C4,C1C3C5]



Pour en finir avec ce cercle de van Lamoen, on peut construire ou demander le centre du cercle C1C3C5, ou comme je l'ai déjà signalé, mais mieux vaut parfois répéter, en validant Lamoen=TriangleCentre[A,B,C,1153]

Les enluminures

Affichage dynamique et script

Je crée d'abord un booléen, un « drapeau » et comme il ne va prendre que les valeurs anglaises *true* ou *false* pourquoi ne pas continuer à le nommer « flag », (pas toubon), comme je le fais depuis une trentaine d'années : flag=true.

(mes cercles circonscrits sont affichés)

J'insère un texte ABC, dans l'éditeur, je sélectionne dans les « Objets », le booléen *flag* et dans sa boîte, je travaille avec la commande Si.

Les cercles étant affichés et flag à *true*, je dois proposer de cacher les cercles :

Si[flag, "Cacher les cercles circonscrits", "Afficher les cercles circonscrits"]

Les objets GeoGebra peuvent se voir associer des scripts, mon texte étant créé, je vais, par clic droit, propriétés, lui affecter cette liste d'actions :

SoitVisibleDansVue[Cercles,1,!flag]

flag=!flag

La commande SoitVisibleDansVue[<Objet>, <Numéro 1|2>, <Booléen>] gère l'affichage de l'objet cité, pour moi, flag à *true*, les cercles définis dans la liste *Cercles* sont affichés, si je veux les cacher, il faut que le booléen soit à *false* d'où le « !flag », le « ! » étant utilisé comme l'opérateur logique « non ». La ligne suivante est un « raccourci » pour basculer l'état du drapeau, ce qui va provoquer le changement du texte affiché.

Même manipulation (avec flag2) pour Afficher/Cacher le cercle passant par C1, C3 et C5.

Et j'avais envie aussi de maintenir ce lien, peut-être un peu artificiel, je le concède, avec le triangle équilatéral, je fais donc une même manipulation pour le texte (avec flag3), mais dans le script, j'utilise la commande SoitValeur qui permet d'affecter une valeur à un objet.

SoitValeur[C,Si[flag3,Rotation[B,60°,A],A/3+2*B/3+VecteurOrthogonal[Vecteur[A,B]]]]

Rotation[B,60°,A] pas de problème, C devient, si flag3 est à *true* l'image de B dans la rotation d'angle 60° autour de A ;

A/3+2*B/3+VecteurOrthogonal[Vecteur[A,B]], ça c'est mon délire, si, si, le triangle quelconque existe, je l'ai rencontré :-)

(Le point C reste un point libre, si le triangle est « quelconque », rien ne nous empêche, avec un peu de doigté, de déplacer le point C pour que le triangle devienne équilatéral, mais le texte va rester « ABC équilatéral », et c'est aussi le cas pour la situation opposée, si le triangle est équilatéral et que l'on déplace C, le texte va rester à « ABC quelconque ». Pour que ce fichier soit « parfait » pour un puriste, il conviendrait de rajouter un test sur la position de C afin de basculer dans ce cas flag3.).

Faut que ça bouge !

Comme beaucoup ne conçoivent pas un fichier sans « animation », un petit balayage du cercle de van Lamoen :

Chaque objet appartenant à un autre objet qualifié de « chemin » par GeoGebra y possède un « paramètre » compris entre 0 et 1.

retour au sommaire

Je définis donc a=2 un curseur *para* variant de 0 à 0.96 avec un incrément de 0.01, une vitesse de 5 et un mode de répétition « Croissant ».

Puis je valide cette petite commande :

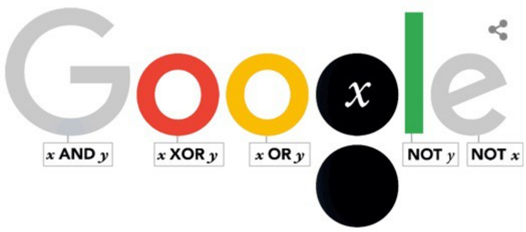
ArcCercle[Lamoen, Point[Cercle[Lamoen, C1], para], Point[Cercle[Lamoen, C1], para + 0.04]]

qui me crée un arc de cercle de centre le point Lamoen créé précédemment, d'origine le point de paramètre *para* du cercle de centre, le point Lamoen, et passant par le point C1, et d'extrémité le point, de ce même cercle, de paramètre *para+0.04* (ce qui justifie le 0.96 afin que le paramètre ne dépasse pas la valeur 1) et bien sûr, j'anime le curseur para.

Ce fichier que vous pouvez tester en ligne sur GeoGebratube tient en 29 « lignes » dans le protocole de construction, il ne fait appel qu'à 17/18 commandes et au plus à 12 outils, et bien sûr, il n'évitera pas la remarque qui tue :« à quoi ça sert ? ».

⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂

Le 2 novembre dernier, un des moteurs de recherche que nous utilisons nous affichait cette image (interactive) :



Cliquer sur cette image nous renvoyait à l'article George Boole de Wikipedia, dont c'était le 200e anniversaire de la naissance.

⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂