

DANS NOS CLASSES**Différence entre carrés d'entiers consécutifs**

Par Valentin Buat-Ménard,
Collège de Douvaine (Haute-Savoie)

Note de la rédaction : Valentin était professeur-stagiaire à Metz en 2002

Un problème de démonstration avec du calcul littéral : où l'on voit que le formatage des questions et des approches de démonstrations nous ferment bien des portes.

Niveau : 3^{ème}

Prérequis : factorisation

La question du manuel : Prouver que la différence entre le carré d'un nombre entier et le carré du nombre entier qui le précède est un nombre impair.

La question modifiée : Que peut-on dire de la différence entre le carré d'un nombre entier et le carré du nombre entier qui le précède ?

Modalités : Les élèves travaillent en ilots, les échanges sont autorisés, encouragés, mais la recherche peut-être personnelle.

- Temps de reformulation
- Recherche de conjectures
- Mise en commun des conjectures
- Temps de recherche des démonstrations

La classe : c'est une classe de troisième à faible effectif et d'un excellent niveau (et oui ça existe, c'est une aberration, mais pour les cours c'est top !)

Déroulement de la séquence

- La reformulation de la question ne pose pas trop de problème. Une élève est tout de même partie sur les racines au lieu des carrés et découvrira d'elle même la relation $(\sqrt{50})^4 = 50^2$ ce qui paraîtra complètement logique aux autres (nous n'avons pourtant pas étudié les racines carrées en détail).
- La recherche est dynamique car il est assez facile de faire les calculs (même sans calculatrice).
- Pour la mise en commun, presque chaque ilot a au moins une proposition. Il en émerge deux :
 - * La différence augmente de 2 à chaque fois qu'on passe au couple d'entiers suivant.
 - * La différence des carrés est égale à la somme des deux nombres.

A noter que la conjecture de la question initiale n'est pas proposée. Avec du recul, elle me semble moins riche, voire plus anodine que celles des élèves. Je ne m'attendais pas à leurs réponses (voir pourquoi plus loin).

Question

Que peut-on dire de la différence du carré d'un nombre entier et du carré du nombre entier qui le précède ?

$$\begin{array}{ccccc}
 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\
 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\
 +5 & +7 & +9 & +11 & \\
 & +2 & +2 & +2 &
 \end{array}$$

Il faut multiplier le nombre de départ par 2, le soustraire à son carré, et ajouter 1 pour trouver le carré de l'entier précédent.

Prenons 2 inconnues entières x et y .

On appelle z la différence entre leurs carrés.

On a alors, quels que soient x et y : $z = x + y$, où y précède x .

(N.d.l.r. : les réponses des élèves ont été retranscrites)

- Pendant la phase de démonstration peu d'élèves arrivent à démarrer. A noter que j'ai imposé qu'on s'attaque à la démonstration de la deuxième proposition. Je vois une élève qui se lève pour regarder le cahier d'une autre, puis se rassoit en disant « ah oui ça marche ! » (voir ci-dessous). Une autre élève est partie sur même piste, sans lettre, mais la généralisation pourra paraître évidente vu la présentation de son calcul.

Voici les deux démonstrations :

$$\begin{array}{l}
 x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 1 \times (x + y) \\
 \quad \quad \quad \uparrow \text{ puisqu'on enlève le chiffre précédent.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 10^2 - 9^2 = 19 \\
 (10 + 9)(10 - 9) = 19 \times 1 = 19 \\
 (x + y)(x - y) = (x + y) \times 1 = (x + y) \text{ donc } x^2 - y^2 = x + y
 \end{array}$$

x et y sont les deux entiers qui se suivent : $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ et $(x - y) = 1$ puisqu'ils se suivent, donc $x^2 - y^2 = x + y$.

Ce qui est très intéressant, c'est qu'un prof de maths bien formaté, va se débarrasser de la deuxième variable, entamer sa démonstration par $(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$ et ne verra pas apparaître la conjecture des élèves.

On peut ensuite aisément utiliser cette première propriété démontrée pour démontrer l'autre conjecture : soit x , y et z trois entiers consécutifs dans l'ordre décroissant :

$(x^2 - y^2) - (y^2 - z^2) = (x + y) - (y - z) = x - z = 2$ puisque x et z sont nécessairement séparés de deux unités.