# Solution du problème n° 121

## Au sujet de 2048

proposé par André Stef

Ce jeu est bien connu sur différents supports informatiques (PC, smartphones,...), du moins au moment où est rédigé ce problème.

Le jeu comporte 16 cases, sur lesquelles peuvent être posées des tuiles de différentes valeurs (2,4,8, ... $2^k$ ,...). Le jeu est la répétition de deux phases de jeu successives :

- A plusieurs reprises : deux tuiles de même valeur peuvent se transformer en une seule tuile de valeur double sur une des deux cases et rien sur l'autre case (qui devient alors libre). En pratique il y a des conditions supplémentaires de position et de déplacement pour que les tuiles puissent se transformer mais cela n'aura pas d'incidence dans ce problème.
- Puis une tuile nouvelle, de valeur 2 ou 4, apparaît sur une case libre (au hasard).

La position de départ est que toutes les cases sont libres.
Le jeu s'arrête lorsqu'il n'y a plus de case libre au moment où une nouvelle tuile devrait aparaître.

La valeur maximale que peut porter une tuile à ce jeu est alors 131 072. On peut trouver ce résultat sur internet, et, bien sûr, vérifier que ce qu'énonce internet sur ce sujet est correct !

Tout au long de la partie un score est affiché : on part de 0 et on ajoute au fur et à mesure les valeurs des tuiles obtenues par transformation ; par exemple deux tuiles de valeur 8 se transforment en une tuile de valeur 16 et fournissent 16 points. On n'obtient pas de point pour l'apparition d'une tuile.

**Enoncé du problème : Quel est le score maximal possible au jeu de 2048 ?**

**Solution proposée par André Stef**

La page "2048" (en anglais) de Wikipedia du 17/04/2015 indique un score maximal de 3 932 156 (sans preuve) alors que cette même page fournit un lien vers un article (en anglais,https://bytebucket.org/sivaramambikasaran/my_notes/raw/d594b562aa7d75f6fce6e48310c4068ba0094c8c/2048_game/2048.pdf) de Sivaram Ambikasaran indiquant un score maximal de 3 932 100 (et le démontrant).
Le magazine de la Régionale APMEP de Lille, Convergence 40, de juin 2014, (http://www.apmep5962.fr/cvg/Convergences40-juin2014.pdf) annonce un score maximal de 3 932 160 (avec indices de démonstration),

On démontre ci-dessous en français, que la valeur est 3 932 100. L'idée est la même que dans l'article de Sivaram Ambikasaran mais la rédaction est ici plus détaillée.
On procèdera par récurrence sur le nombre $n$ de cases disponibles, généralisant ainsi le problème et nous appliquerons le résultat à la valeur $n$=16.

### Exemples

$n$=1. Le score maximal est 0. Il n'est pas possible de fusionner des tuiles. La valeur maximale de tuile est alors 4 (arrivée d'une tuile "4" avant blocage).

retour au sommaire

*n*=2. On se convaincra que le score maximal est 12 et la tuile maximale est 8. Cela correspond par exemple à la suite de tuiles suivantes (sur chaque ligne : en fond jaune les fusions nouvelles et en vert la tuile nouvelle arrivant ensuite).

| score | | |
|---|---|---|
| **0** | 2 | |
| **0** | 2 | 2 |
| **4** | 4 | 4 |
| **12** | 8 | 2ou4 |

*n*=3. On se convaincra que le score maximal est 56 et la tuile maximale est 16.

| score | | | |
|---|---|---|---|
| **0** | 2 | | |
| **0** | 2 | 2 | |
| **4** | 4 | 2 | |
| **4** | 4 | 2 | 2 |
| **8** | 4 | 4 | 2 |
| **16** | 8 | 2 | |
| **16** | 8 | 2 | 2 |
| **20** | 8 | 4 | **4** |
| **28** | 8 | 8 | 2 |
| **44** | 16 | 2 | |
| **44** | 16 | 2 | 2 |
| **48** | 16 | 4 | **4** |
| **56** | 16 | 8 | 2ou4 |

## <u>Cas général</u>

On définit :

- $A_n$ le score maximal possible avec *n* cases, la question du problème est de déterminer $A_{16}$ . On a $A_1=0\,;A_2=12\,;A_3=56$ .
- $a_n$ le score maximal pour obtenir la tuile de hauteur maximale avec *n* cases et aucune autre tuile à côté avant apparition d'une nouvelle tuile.

On a $a_1=0\,;a_2=12\,;a_3=44$ .

retour au sommaire

| score | | |
|---|---|---|
| 0 | 2 | |
| 0 | 2 | 2 |
| 4 | 4 | 4 |
| 12 | 8 | 2ou4 |

| score | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | | |
| 0 | 2 | 2 | |
| 4 | 4 | 2 | |
| 4 | 4 | 2 | 2 |
| 8 | 4 | 4 | 2 |
| 16 | 8 | 2 | |
| 16 | 8 | 2 | 2 |
| 20 | 8 | 4 | 4 |
| 28 | 8 | 8 | 2 |
| 44 | 16 | 2 | |

On définit $b_n$ , le score maximal pour obtenir la tuile de hauteur maximale, en n'utilsant que des tuiles de "2" (et pas de "4") avec *n* cases et aucune autre tuile à côté avant apparition d'une nouvelle tuile.
On a $b_1=0\,;b_2=4\,;b_3=16$

| score | | |
|---|---|---|
| 0 | 2 | |
| 0 | 2 | 2 |
| 4 | 4 | 2 |

| score | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | | |
| 0 | 2 | 2 | |
| 4 | 4 | 2 | |
| 4 | 4 | 2 | 2 |
| 8 | 4 | 4 | 2 |
| 16 | 8 | 2 | |

Par définitions, on a $b_n \leq a_n$ .

On définit $\alpha_n$ la valeur maximale que l'on peut obtenir en utilisant *n* cases et $\beta_n$ la valeur maximale que l'on peut obtenir en utilisant *n* cases en n'utilisant que la tuile "2". Le lecteur pourra se convaincre que $\alpha_{n+1}=2\times\alpha_n$ et $\beta_{n+1}=2\times\beta_n$ ce qui fournit $\alpha_n=2^{n+1}\,;\beta_n=2^n$ .

**Valeur de $b_n$.** Il s'agit d'obtenir la tuile de valeur $\beta_n=2^n$ . Pour ce faire, on construit deux fois une tuile de taille $\beta_{n-1}=2^{n-1}$ (utilisant *n*-1 cases pour la première tuile puis *n*-1 pour la seconde en laissant la *n*-ème occupée par la première tuile construite). Puis on fusionne ces deux tuiles (pour un gain de $2\times b_{n-1}=2^n$ ). Ainsi $b_n=2b_{n-1}+2^n$
Par un procédé quelconque, quitte à le montrer par récurrence, on a $b_n=(n-1)2^n$ pour tout entier naturel *n* non nul.

retour au sommaire

**Valeur de $a_n$**. Il s'agit d'obtenir la tuile de valeur $\alpha_n = 2^{n+1}$ . Pour ce faire, on construit deux fois une tuile de taille $\alpha_{n-1} = 2^n = \beta_n$ (utilisant $n$ cases pour la première tuile, ce qui peut être fait en utilisant uniquement des tuiles de taille "2", puis $n$-1 pour la seconde en laissant la $n$-ème occupée par la première tuile construite, ce qui nécessitera l'introduction d'une tuile de "4", au moins). Puis on fusionne ces deux tuiles. Ainsi $a_n = b_n + a_{n-1} + 2^{n+1}$ .

Utilisant alors l'expression de $b_n$ , on obtient alors la formule de récurrence $a_n = a_{n-1} + (n+1)2^n$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

**<u>Valeurs numériques et comparaison</u>**

| $n$ | $b_n = (n-1)2^n$ | $a_n = a_{n-1} + b_n + 2^{n+1}$ | $b_{n+1} = 2 \times b_n + 2^{n+1}$ | $a_n - b_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $a_1 = 0$ | 4 | -4 |
| 2 | 4 | 12 | 16 | -4 |
| 3 | 16 | 44 | 48 | -4 |
| 4 | 48 | 124 | 128 | -4 |

Ce tableau permet de conjecturer la formule $a_n = b_{n+1} - 4 = n\ 2^{n+1} - 4$ , ce que l'on démontre sans difficulté par récurrence.

**Valeur de $A_n$**

Il reste à sommer $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (k\ 2^{k+1} - 4)$ .

La technique est au choix. On peut, par exemple, écrire

$$A_n = 2A_n - A_n = -4n + \sum_{k=1}^{n} k\ 2^{k+2} - \sum_{k=1}^{n} k\ 2^{k+1} = -4n + \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)2^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\ 2^{k+1} = etc...$$

On établit que $A_n = (n-1)(2^{n+2} - 4)$ .

NB : A défaut de l'établir directement, on peut le faire par récurrence.

Ainsi $A_{16} = 3\ 932\ 100$ .

**<u>Analyse de l'erreur possible de l'article de Convergence</u>**

Il est probable (ce que confirme la remarque 9 de l'article) qu'il n'ait pas été tenu compte de l'obligation d'incorporer une tuile de "4" de temps en temps, quinze fois en tout (avant le dernier coup, qui ne modifie pas le score), ce qui a chaque fois un "cout" de 4 (faute de réaliser la fusion "2+2").

Ainsi l'erreur revient à remplacer à tort $a_{n-1}$ par $b_n$ dans la formule $a_n = b_n + a_{n-1} + 2^{n+1}$ .

On obtient alors un écart total de 60 avec le résultat.

**<u>Erreur possible de l'article de Wikipedia</u>** : Aucune idée si ce n'est que c'est un article sur Internet (même si c'est Wikipedia).

Note : à moins d'une homonymie toujours possible Sivaram Ambikasaran est professeur adjoint *(assistant professor)* à l'université de New York (voir son site www.cims.nyu.edu/~sivaram/, mais sa note sur "2048" n'y est pas citée).

La rubrique « Problèmes » a un nouveau responsable : André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr

# Problème du trimestre n°122

*"Il était une fois un Bûcheron et une Bûcheronne qui avaient sept enfants tous Garçons. L'aîné n'avait que dix ans, et le plus jeune n'en avait que sept. On s'étonnera que le Bûcheron ait eu tant d'enfants en si peu de temps ; mais c'est que sa femme allait vite en besogne, et n'en faisait pas moins que deux à la fois …"*

## Au sujet du Petit Poucet

proposé par André Stef

*"Il était une fois un Bûcheron et une Bûcheronne qui avaient sept enfants tous Garçons. L'aîné n'avait que dix ans, et le plus jeune n'en avait que sept."*

Voici les deux premières phrases de l'histoire du Petit Poucet de Charles Perrault, conte plutôt bien connu. Le rapport avec le Petit Vert vient de la troisième phrase:

*"On s'étonnera que le Bûcheron ait eu tant d'enfants en si peu de temps ; mais c'est que sa femme allait vite en besogne, et n'en faisait pas moins que deux à la fois…"*

Un mathématicien pourra avoir (et a eu) cette idée bizarre de chercher quelles ont pu être les naissances possibles. Ainsi cela a pu être dans l'ordre des jumeaux, puis des triplés puis des jumeaux (qu'on codera (2,3,2)) ou des triplés puis des jumeaux puis à nouveau des jumeaux (3,2,2) ,...

Question 1: Enoncer toutes les naissances possibles répondant aux contraintes formulées.

question 2: Généralisation. Le nombre d'enfants n'est plus 7 mais un paramètre entier $n$. Dénombrer le nombre de naissances possibles en fonction de $n$.

La rubrique « Problèmes » a un nouveau responsable : André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr

⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂

Il faut avoir foi en certaines choses. La vie n'est pas assez longue pour faire la preuve mathématique de toute chose avant d'y croire.

Thomas Hardy

retour au sommaire