

Solution du problème n° 120

Au sujet des tours de Hanoï (proposé par André Stef)

Le problème des tours de Hanoï a été proposé par Edouard Lucas à la fin du XIX^{ème} siècle. Voici une description à peine plus générale du problème (n disques au lieu de 64). On dispose de trois plateaux. On doit déplacer n disques de tailles différentes empilés (en taille décroissante) sur l'un des plateaux vers un autre plateau, en respectant les règles suivantes:

- on ne peut déplacer qu'un disque à la fois,
- on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide (sur un plateau),

Ce problème est très connu. Les questions que l'on peut poser à ce sujet sont:

Comment opérer ces déplacements pour $n=2,3,4,\dots$?

Comment le faire en un minimum de déplacements ? (question double: quel est le nombre minimum de coups à effectuer pour déplacer ces n disques sur le plateau final ? Donner un algorithme permettant de le faire)

Les réponses sont connues. Ainsi le nombre minimal de déplacements est $2^n - 1$. Un algorithme récursif classique réalisant ce minimum est:

algo: déplace de n disques du plateau **A** vers le plateau **C**, avec l'aide du plateau **B**

DEBUT

SI $n \neq 0$ alors

FAIRE déplace de $n-1$ disques du plateau **A** vers le plateau **B**, avec l'aide du plateau **C**

Déplacer le disque (de taille n) du plateau **A** vers le plateau **C**

FAIRE déplace de $n-1$ disques du plateau **B** vers le plateau **C**, avec l'aide du plateau **A**

fin **SI**

FIN

On lance l'algorithme par l'instruction

FAIRE déplace de n disques du plateau **1** vers le plateau **3** avec l'aide du plateau **2**

On peut "dérécursifier" cet algorithme (car on peut toujours le faire), des lecteurs se souviennent peut-être l'avoir effectué durant leurs études (en Pascal par exemple).

Énoncé du problème 120.

On code les déplacements suivants des disques:

- Si on déplace un disque du plateau 1 vers le plateau 2, on le code : 3
- Si on déplace un disque du plateau 1 vers le plateau 3, on le code : 2
- Si on déplace un disque du plateau 2 vers le plateau 3, on le code : 1
- Si on déplace un disque du plateau 2 vers le plateau 1, on le code : 3
- Si on déplace un disque du plateau 3 vers le plateau 1, on le code : 2
- Si on déplace un disque du plateau 3 vers le plateau 2, on le code : 1

c'est-à-dire qu'on code avec le numéro du plateau non utilisé pour le déplacement.

- 1) On code un déplacement de n disques. Ce code permet-il de retrouver les déplacements effectués ?
- 2) On code un déplacement en $2^n - 1$ opérations de n disques du plateau 1 au plateau 3. Décrire ce code (en le justifiant).

NB: Ce sujet a été l'objet d'un atelier MATH.en.JEANS au collège de Lamarche en 2010/2011 avec Perrine Schaal.

Solution proposée par André Stef

1) La fonction qui à une suite de k déplacements de plateaux associe le mot de longueur k constitué par la concaténation des codages des déplacements est injective.

En effet: Tout code ne correspond au plus qu'à un seul déplacement: le disque le plus petit des deux plateaux concernés est déplacé sur l'autre plateau

A un mot ne correspond donc qu'une seule suite possible de déplacements

2) Pour $n=1$, le codage est: 2.

Pour $n=2$, le codage est 321.

Pour $n=3$, le codage est 2312312.

Le résultat général est que le code est périodique (mais fini), de période 3, et

- pour n pair, le code est $321... \overline{321} ... 321$.

- pour n impair, le code est $231... \overline{231} ... 12$.

On procède par récurrence

On suppose que pour un certain n , le déplacement de n disques de A vers B à l'aide du plateau C est

- $BCA... \overline{BCA} ... BCA$ si n est pair

- $CBA... \overline{CBA} ... AC$ si n est impair

Pour $n = 1, 2$ et 3 , le résultat est correct (on pose $A=1, B=2, C=3$)

Considérons le déplacements de $n+1$ disques,

Si $n+1$ est pair, on suit l'algorithme décrit en énoncé:

- on déplace n disques de A vers C (n impair, avec hypothèse de récurrence en inversant les rôles de B et C), Code: $BCA... BCA... BCAB$.

- on déplace alors le disque de taille $n+1$ de A vers B: code : C

- on déplace n disques de C vers B (n impair, avec hypothèse de récurrence en inversant les rôles de A et C), Code: $ABC... ABC... CA$.

La concaténation de ces codes fournit le code: $BCA... \overline{BCA} ... BCA$

Si $n+1$ est impair, on suit de même l'algorithme décrit en énoncé:

- on déplace n disques de A vers C (n pair, avec hypothèse de récurrence en inversant les rôles de B et C), Code: $CBA... CBA... CBA$.

- on déplace alors le disque de taille $n+1$ de A vers B: code : C

- on déplace n disques de C vers B (n pair, avec hypothèse de récurrence en inversant les rôles de A et C), Code: $BAC... BAC... BAC$.

La concaténation de ces codes fournit le code: $CBA... \overline{CBA} ... AC$.

Il n'y plus qu'à conclure. C.Q.F.D. (ou Q.E.D.)

Le code fournit alors un algorithme, sans peine (ou presque, attention à la transcription du code), de déplacement des disques.

On peut également noter qu'on a bien ici une description itérative.

Problème du trimestre n°121

Au sujet de 2048

proposé par André Stef

Ce jeu est bien connu sur différents supports informatiques (PC, smartphones,...), du moins au moment où est rédigé ce problème.

Le jeu comporte 16 cases, sur lesquelles peuvent être posées des tuiles de différentes valeurs (2,4,8, ... 2^k ,...). Le jeu est la répétition de deux phases de jeu successives :

- A plusieurs reprises : deux tuiles de même valeur peuvent se transformer en une seule tuile de valeur double sur une des deux cases et rien sur l'autre case (qui devient alors libre). En pratique il y a des conditions supplémentaires de position et de déplacement pour que les tuiles puissent se transformer mais cela n'aura pas d'incidence dans de problème.
- Puis une tuile nouvelle, de valeur 2 ou 4, apparaît sur une case libre (au hasard).

La position de départ est que toutes les cases sont libres.

Le jeu s'arrête lorsqu'il n'y a plus de case libre au moment où une nouvelle tuile devrait apparaître.

La valeur maximale que peut porter une tuile à ce jeu est alors 131072. On peut trouver ce résultat sur internet, et, bien sûr, vérifier que ce qu'énonce internet sur ce sujet est correct !

Tout au long de la partie un score est affiché : on part de 0 et on ajoute au fur et à mesure les valeurs des tuiles obtenues par transformation ; par exemple deux tuiles de valeur 8 se transforment en une tuile de valeur 16 et fournissent 16 points. On n'obtient pas de point pour l'apparition d'une tuile.

Enoncé du problème 121

Quel est le score maximal possible au jeu de 2048 ?

La rubrique « Problèmes » a un nouveau responsable : André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr