

ÉTUDE MATHÉMATIQUE**Jules Verne connaissait les caches tournants...***Par François DROUIN*

ihnalz	zaemen	ruiopn
arnuro	trvree	mtqssl
odxhnp	estlev	eeuart
aeheel	ennios	noupvg
spesdr	erssur	ouitse
eedgnc	toeedt	artuee

Jules Verne, dans son roman *Matthias Sandorf*, évoque un « texte » comportant dix-huit « mots » disposés comme ci-contre.

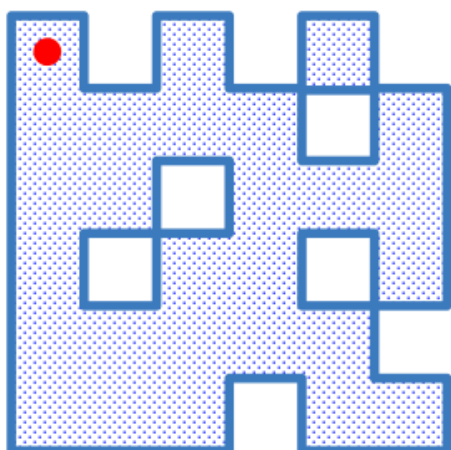
Les personnes cherchant à déchiffrer le message étaient certaines qu'il avait été codé à l'aide d'un cache tournant découpé dans une grille en carton. En s'introduisant dans un bureau, elles réussirent à connaître la taille de la grille et la disposition des cases évidées et donc à en reproduire un exemplaire.

Les six « mots » formant la première colonne du message ont été placés dans un carré 6×6, tout comme les six des deux autres colonnes.

Elles ont fait pivoter le cache sur les grilles en utilisant des quarts de tour, de nouvelles lettres sont apparues, ne laissant pas visibles les lettres déjà vues.

Voici le cache utilisé et les trois grilles construites avec les dix-huit « mots » du message.

Le point rouge doit être placé, au départ, en haut à gauche.



i	h	n	a	l	z
a	r	n	u	r	o
o	d	x	h	n	p
a	e	e	e	i	l
s	p	e	s	d	r
e	e	d	g	n	c

Le cache utilisé dans le roman de Jules Verne

La grille 1

z	a	e	m	e	n
t	r	v	r	e	e
e	s	t	l	e	v
e	n	n	i	o	s
e	r	s	s	u	r
t	o	e	e	d	t

La grille 2

r	u	i	o	p	n
m	t	q	s	s	l
e	e	u	a	r	t
n	o	u	p	v	g
o	u	i	t	s	e
a	r	t	u	e	e

La grille 3

Ce principe de codage et décodage a été inventé par le colonel autrichien Edouard Fleissner von Wostrowitz (1825 – 1888).

Les quatre regroupements « hazrxeirg », « nohaledec », « nadnepedn » et « ilruopess » sont apparus avec le carré construit avec les « mots » de la grille 1 du message.

Les quatre regroupements « amnetnore », « velessuot », « etseirted » et « zerrevnes » sont ensuite apparus avec le carré construit avec les « mots » de la grille 2 du message.

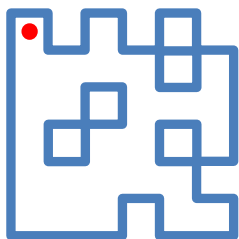
Les quatre regroupements « uonsuoveu », « qlangisre », « imerpuate » et « rptsetuot » sont ensuite apparus avec le carré construit avec les « mots » de la grille 3 du message.

En écrivant les « mots » déchiffrés les uns après les autres, voici le message obtenu :

hazrxeirgnohaledecnadnepednilruopessamnetnorevelessuotetseirtedzerrevnesuonsuoveuqlangisreimerpuaterptsetuot

En écrivant le message à partir de la fin, en rétablissant les coupures entre les mots, la ponctuation et des majuscules, le texte suivant apparait : ***Tout est prêt. Au premier signal que vous nous enverrez de Trieste, tous se lèveront en masse pour l'indépendance de la Hongrie. Xrzah***

Comment créer de tels caches ?



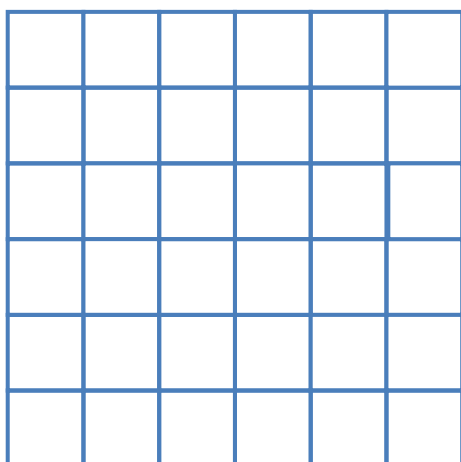
Tel qu'il est proposé dans le roman de Jules Verne, le cache montre une attache fragile du carré du haut le plus à droite (dans la première ligne).

L'envie vient de comprendre comment il a été conçu, puis d'en créer de nouveaux fonctionnant de manière identique et ne présentant pas ce défaut.

La découpe d'une case fait que trois autres cases ne pourront pas être évidées. Ces trois cases sont trouvées par des rotations de 90°, 180° et 270° de la case évidée autour du centre du carré (des quarts de tour, des demi-tours et des trois quarts de tour viennent au secours des élèves).

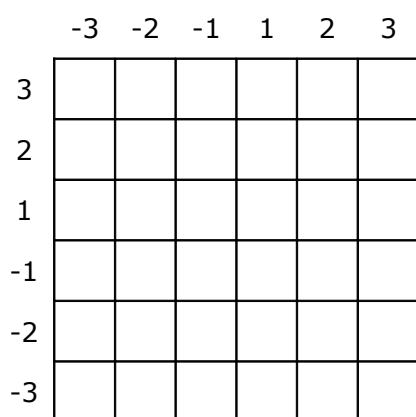
	1				
					1
1					
				1	

3	1	4	2	5	3
5	6	8	7	6	1
2	7	9	9	8	4
4	8	9	9	7	2
1	6	7	8	6	5
3	5	2	4	1	3



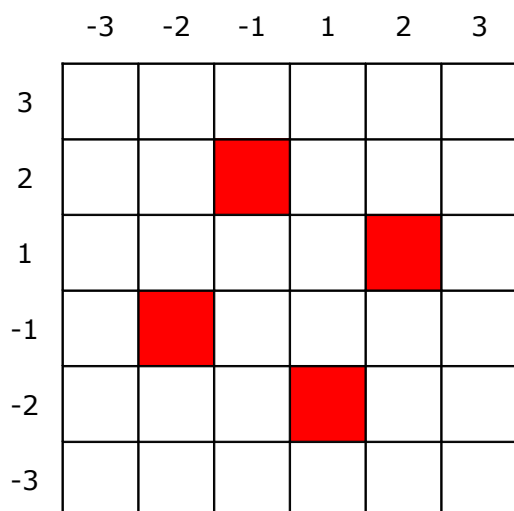
Le nouveau cache obtenu permet le codage et le décodage d'autres messages et ne présente pas le défaut de solidité de celui utilisé par Jules Verne.

Cette méthode nécessite la gestion mentale de quarts de tours (ou de rotations d'angle 90°).



Des résultats de géométrie analytique peuvent également être sollicités.

Les colonnes et les lignes du cache sont repérées par les nombres -3, -2, -1, 1, 2, 3.



Si $(x ; y)$ sont les coordonnées de la première case évidée, $(-y ; x)$, $(-x ; -y)$ et $(y ; -x)$ sont les coordonnées des trois autres cases qu'il ne faudra pas éviter.

La gestion mentale des quarts de tour n'est alors plus mise en œuvre, un traitement plus automatisé est alors envisageable. Il restera cependant à gérer les éventuels problèmes de solidité du cache.

D'autres tailles et d'autres formes de caches sont-elles concevables ?

Avec une rotation de 90°

Les rotations de 90° imposent que la grille soit carrée. Si nous désirons comme Jules Verne que toutes les lettres du message apparaissent dans les vides du cache, il faut que le nombre des lettres du message soit un multiple de 4 (comme dans le message du roman, les mots seront mis sans espaces pour les séparer). Le nombre de cases découpées dans le cache est donc le quart du nombre total de cases du carré, ce qui explique les 9 trous dans le cache utilisé dans le roman de Jules Verne.

Combien existe-t-il de grilles carrées de côté 6 possibles (indépendamment des problèmes de fragilité) ? Nous en dénombrons 4^9 si on impose le bord supérieur gauche, 4^8 pour des grilles différentes, 2×4^7 si on omet le recto/verso.

Des caches à moins de 9 trous seront utilisables pour des messages plus courts, des lettres de la grille ne feront alors pas partie du message à retrouver.

Pour des carrés de côté n :

Quels sont les nombres n tels que n^2 est un multiple de 4 ? Le nombre n doit être pair.

Que se passe-t-il lorsque n est impair ($n = 2p + 1$) ? La case centrale pivote sur elle-même, le choix peut être fait de la laisser visible ; une lettre du message sera alors connue. Les autres cases sont au nombre de $(2p + 1)^2 - 1$, c'est à dire $4p^2 + 4p$. Ce nombre est un multiple de 4, les cases autres que la case centrale pourront toutes être rencontrées (une et une seule) fois lors des quarts de tour utilisés.

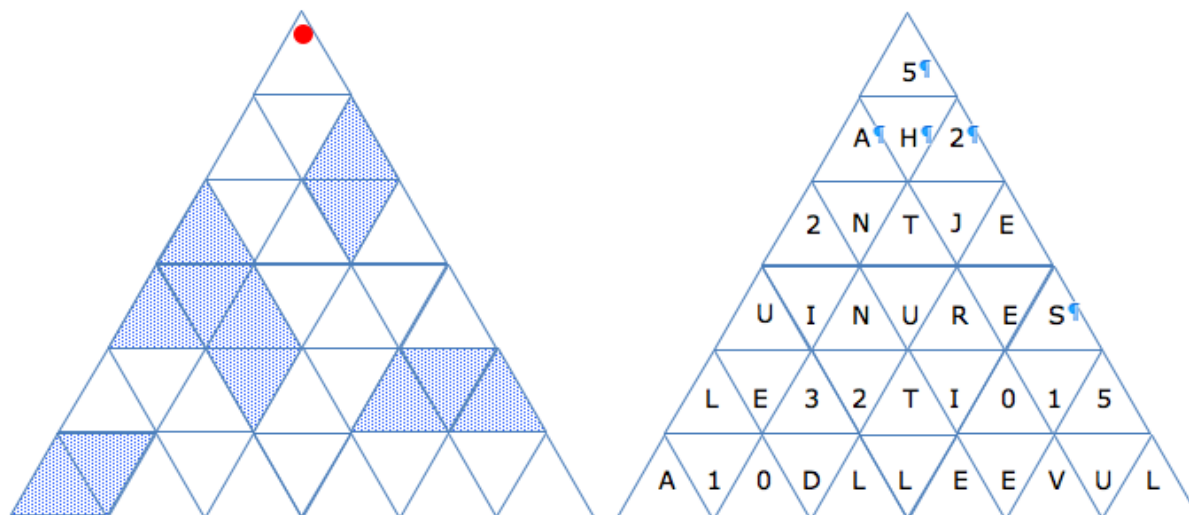
Des carrés de côté impair peuvent donc être utilisés. En ne découpant pas la case centrale, le nombre de trous du cache sera $(n^2 - 1) / 4$ pour des messages de $n^2 - 1$ signes.

Dans tous les cas, des caches ayant moins de trous pourront aussi être utilisés pour des messages plus courts.

Avec d'autres rotations

Le fait de faire "le tour" complet impose des rotations "élémentaires" de $360 \times k/n$ degrés (ou $2k \times \pi/n$). Nous nous contenterons ici d'étudier quelques situations $360^\circ/n$. Le cas $n=4$ a été étudié précédemment. Les cas « $n=3$ » et « $n=6$ » étudiés ci-dessous s'inspirent de plateaux de jeux repérés par André Stef.

Le cas $n=3$

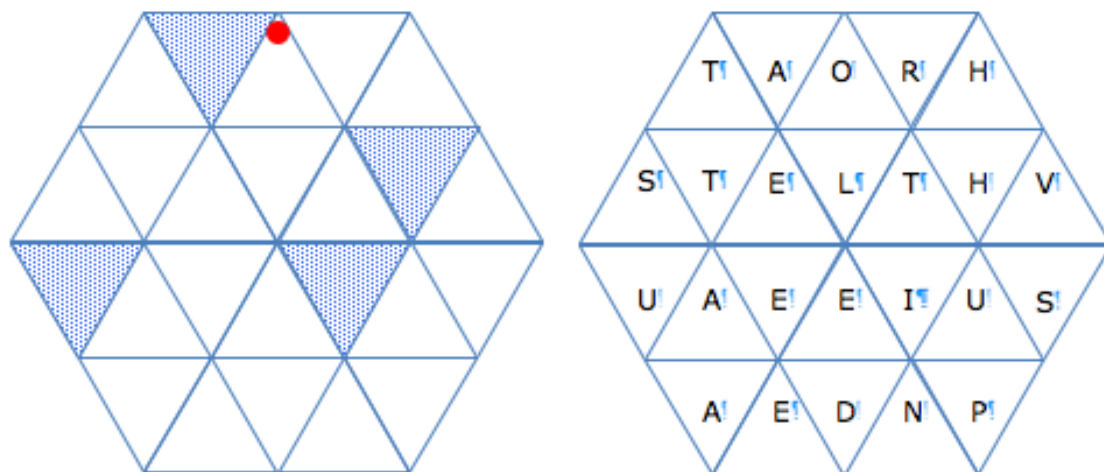


Découper les triangles colorés pour obtenir le cache. Trois rotations successives feront apparaître le message caché dans la grille. Pour commencer, le point rouge est placé en haut.

Le triangle équilatéral de côté n est formé de n^2 triangles élémentaires. Pour que toutes les lettres écrites dans le triangle soient rencontrées lors des trois rotations du cache, il faut que le message comporte n^2 signes et le cache $n^2/3$ cases évidées.

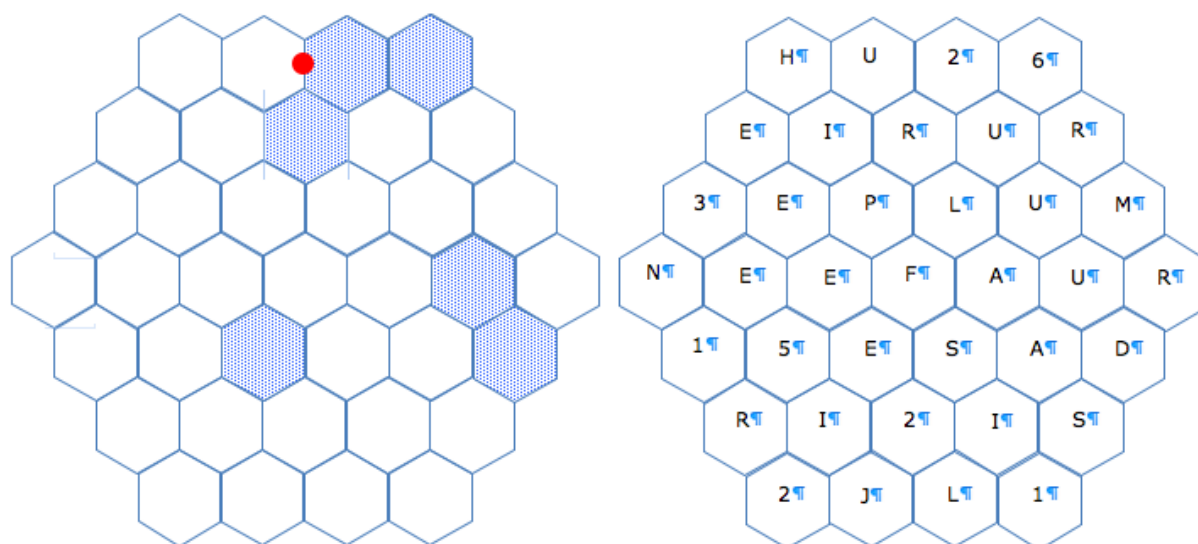
Si n n'est pas un multiple de 3, n peut s'écrire $3n + 1$ ou $3n + 2$. n^2 sera égal à $9n^2 + 6n + 1$ ou $9n^2 + 12n + 1$. Un symbole ne faisant pas partie du message pourra être écrit dans la case en position « centrale ».

Le cas $n=6$



Découper les triangles colorés pour obtenir le cache. Six rotations successives feront apparaître le message caché dans la grille. Pour commencer, le point rouge est placé en haut.

L'hexagone régulier de côté n est formé de $6 \times n^2$ triangles élémentaires. Pour que toutes les lettres écrites dans le triangle soient rencontrées lors des trois rotations du cache, il faut que le message comporte $6 \times n^2$ signes et le cache n^2 cases évidées.



Découper les hexagones colorés pour obtenir le cache. Six rotations successives feront apparaître le message caché dans la grille. Pour commencer, le point rouge est placé en haut.

Les nombres d'hexagones formant les « couronnes » entourant la case centrale s'écrivent toutes sous la forme $6k$ (exemple : 6×3 pour la couronne extérieure de l'exemple ci-dessus). Le nombre total d'hexagones pourra s'écrire sous la forme $6p + 1$. Le message pourra

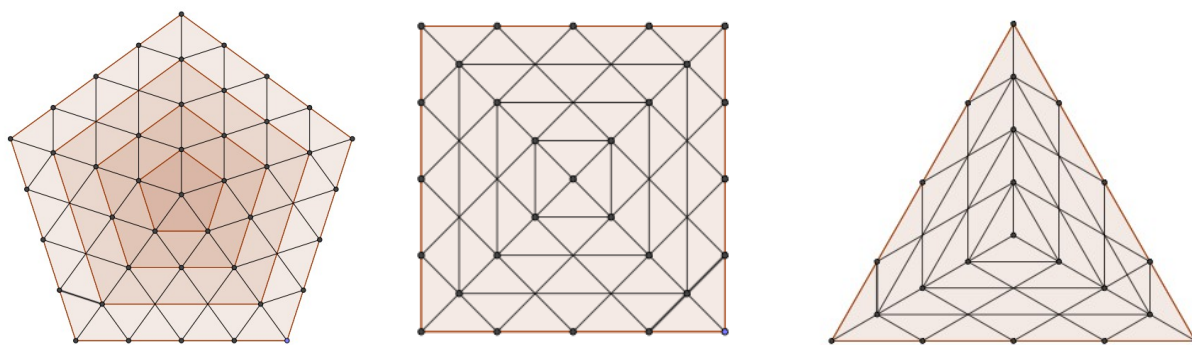
comporter $6p$ signes, le cache p cases évidées et l'hexagone central pourra être rempli par un symbole ne faisant pas partie du message.

Remarques

La solution à un problème d'empilements de cylindres présenté dans le Petit Vert n°54 contient la preuve que l'hexagone régulier de côté n est formé de $3n^2 - 3n + 1$ hexagones élémentaires. Ce résultat peut aussi être utilisé.

Des plateaux de jeu sont source d'inspiration pour ces caches tournants non encore utilisés dans la littérature. Le plateau de SPECTRANGLE® utilise un triangle équilatéral de côté 6, le plateau d'ABALONE® peut être assimilé à un hexagone de côté 5, lui même recouvert par des hexagones unitaires, le plateau de TOTUGA® utilise un plateau semblable, mais de côté 4. Le plateau de DAMES CHINOISES utilise un hexagone et six triangles équilatéraux réalisés sur un réseau triangulé. Cette configuration non étudiée dans cet article pourra également devenir le support de caches tournants...

Pour $n = 5$ et pour généraliser



Isabelle Dubois a réfléchi sur la réalisation de grilles pour $n=5$, et a pensé à une façon générale de faire des grilles " (n,k) " où n est le nombre de rotations à effectuer, et k est le nombre de "subdivisions" des segments du pourtour de la figure.

Les grilles obtenues possèdent à chaque fois des cases triangulaires et pourront être facilement tracées par les élèves, utilisant des subdivisions en k parties égales des segments du pourtour et reconnaissant des situations de mise en œuvre possible de la propriété de Thalès.

Avec GeoGebra, elle a réalisé les grilles pour $n=3$ (triangle), $n=4$ (carré) et $n=5$ (pentagone), avec à chaque fois $k=4$ (facile à faire avec la fonction "milieu" de GeoGebra). Des grilles peuvent être réalisées pour n et k quelconques. Si n ne divise pas 360° , les tracés ne seront qu'approximatifs, mais les grilles resteront utilisables pour la réalisation de caches tournants et de grilles contenant un message à décoder.

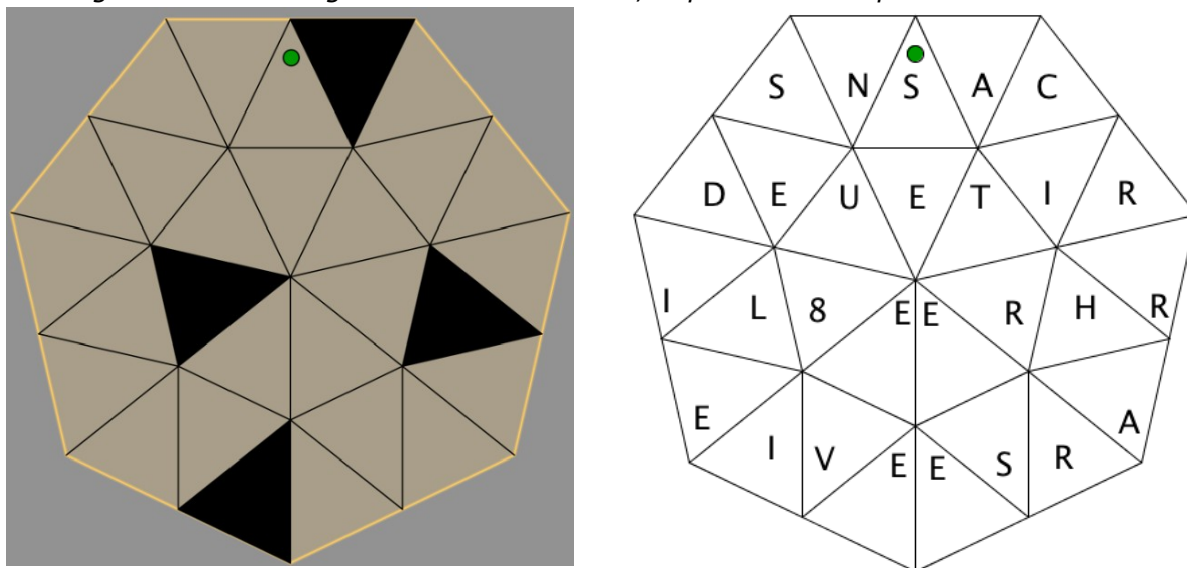
Dans un "secteur" principal de la grille, il y a $1+3+\dots+(2k-1)$ cases, donc k^2 cases, et ainsi $n \times k^2$ cases dans la grille.

Le nombre de caches différents par grille pourra aussi être calculé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	
1	n \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15							
2		3	12	27	48	75	108	147	192	243	300	363	432	507	588	675						
3		4	16	36	64	100	144	196	256	324	400	484	576	676	784	900						
4		5	20	45	80	125	180	245	320	405	500	605	720	845	980	1125						
5		6	24	54	96	150	216	294	384	486	600	726	864	1014	1176	1350						
6		7	28	63	112	175	252	343	448	567	700	847	1008	1183	1372	1575						
7		8	32	72	128	200	288	392	512	648	800	968	1152	1352	1568	1800						
8		9	36	81	144	225	324	441	576	729	900	1089	1296	1521	1764	2025						
9		10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000	1210	1440	1690	1960	2250						
10		11	44	99	176	275	396	539	704	891	1100	1331	1584	1859	2156	2475						
11		12	48	108	192	300	432	588	768	972	1200	1452	1728	2028	2352	2700						
12		13	52	117	208	325	468	637	832	1053	1300	1573	1872	2197	2548	2925						
13		14	56	126	224	350	504	686	896	1134	1400	1694	2016	2366	2744	3150						
14		15	60	135	240	375	540	735	960	1215	1500	1815	2160	2535	2940	3375						
15		16	64	144	256	400	576	784	1024	1296	1600	1936	2304	2704	3136	3600						
16		17	68	153	272	425	612	833	1088	1377	1700	2057	2448	2873	3332	3825						
17		18	72	162	288	450	648	882	1152	1458	1800	2178	2592	3042	3528	4050						
18		19	76	171	304	475	684	931	1216	1539	1900	2299	2736	3211	3724	4275						
19		20	80	180	320	500	720	980	1280	1620	2000	2420	2880	3380	3920	4500						
20																						
21	en rouge : diviseurs de 360																					
22	k^2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	: nombres de cases par secteur						
23																						
24		Nombre de cases totales d'une grille à n secteurs (triangle isocèle d'angle 360/n°) et à k « lignes »																				
25		égal à n*k^2																				

Un exemple pour n= 7

Découper les triangles noirs pour obtenir le cache. Sept rotations successives feront apparaître le message caché dans la grille. Pour commencer, le point vert est placé en haut.



Le message à découvrir ainsi que des compléments à propos des grilles conçues par Isabelle Dubois figureront dans un prochain numéro du Petit Vert.

Avant Jules Verne et Fleissner, les grilles de Cardan

Les grilles tournantes de Fleissner sont une amélioration des grilles imaginées dès le XVIème siècle par Gérôme Cardan (Girolamo Cardano).

Un exemple qui pourra donner envie d'en créer d'autres

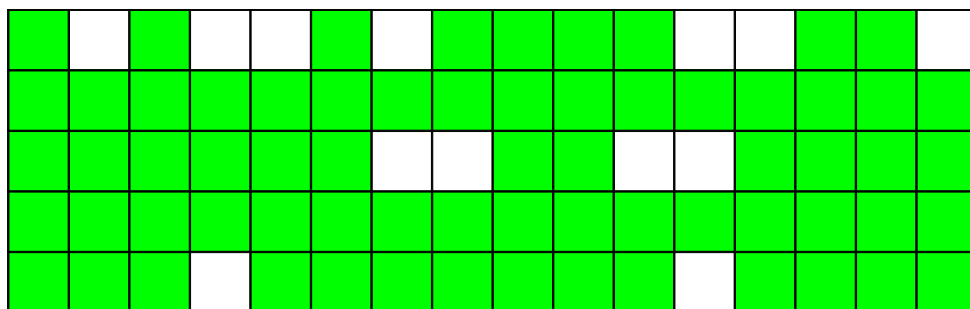
Mon message doit préciser un lieu de rendez-vous que je tiens à garder secret. Je voudrais rendre non lisible le message « A LA GARE DU NORD ».

Je le cache à l'intérieur d'une autre phrase plus anodine : « LA LANGUE PARLEE A VERDUN NOUS SERT DE MODELE ».

Je place cette phrase dans un rectangle.

L	A		L	A	N	G	U	E		P	A	R	L	E	E
	A		V	E	R	D	U	N		N	O	U	S		
	S	E	R	T		D	E			M	O	D	E	L	E

Je découpe un cache ne rendant visible que les lettres de mon message secret.



Je fais parvenir ce cache à mon destinataire. Il réussira à retrouver mon message lorsqu'il recevra le rectangle ci-dessous.

L	A		L	A	N	G	U	E		P	A	R	L	E	E
	A		V	E	R	D	U	N		N	O	U	S		
	S	E	R	T		D	E			M	O	D	E	L	E

Sitographie

À propos des grilles tournantes de Fleissner

<http://www.apprendre-en-ligne.net/crypto/transpo/tournant.html> présente le principe de codage et décodage à l'aide d'un cache tournant inventé par le colonel autrichien Edouard Fleissner von Wostrowitz et employé dans le roman Mathias Sandorf de Jules Verne.

http://en.wikipedia.org/wiki/Edouard_Fleissner_von_Wostrowitz

<http://www.bibmath.net/crypto/index.php?action=affiche&quoi=ancienne/sandorf> permet de retrouver les extraits du roman dans lesquels le cache intervient.

<http://beq.ebooksgratuits.com/vents/Verne-Sandorf.pdf> permet pour télécharger une version électronique du livre de Jules Verne (Le déchiffrement du message se lit à partir de la page 64).

<http://www.wdr.de/tv/wissenmachtah/bibliothek/schablone.php5> Une grille 4x4 pour retrouver un message dans un tableau 8x8.

http://de.wikipedia.org/wiki/Flei%C3%9Fnersche_Schablone Pour retrouver le nombre de caches possibles à partir d'un carré 6x6 ou d'un plus grand (pas de trous « symétriques »).

À propos des grilles de Cardan

http://fr.wikipedia.org/wiki/Grille_de_Cardan pour la présentation des grilles de Cardan

<http://www.chassesautresorludiques.com/espace-creation.php#scytale> Parmi d'autres méthodes de codage et décodage, la création d'une grille de Cardan est proposée pour de jeunes élèves (la grille est une des faces d'une pochette en papier).

En 2012, dans le livre « l'œuf d'Einstein » (PUBLIBOOK)

Romain Puértolas y évoque aux pages 97, 98, 99, 100 et 101 l'usage d'une grille tournante réalisée à partir d'un carré 7x7. Le carré utilisé par Jules Verne n'est donc pas le seul présent dans la littérature.

En 2014, au Jardin des Enfants de la Science sur le Campus de Metz Bridoux

A l'occasion de la Fête de la Science, les grilles de Cardan et les grilles tournantes de Fleissner ont été présentées à des élèves de cycle 3. Les documents utilisés « C1 - La sacoche de Girolamo » et « C2 - un rendez vous secret » font partie du dossier « codage » téléchargeable à l'adresse

http://iecl.univ-lorraine.fr/~Isabelle.Dubois/fete_sciences/.

En 2015, je me dois de dire un grand merci à Isabelle Dubois et André Stef. Les échanges que j'ai eus avec eux m'ont fait corriger et compléter ma proposition initiale.

Les messages à découvrir avec le cache triangulaire et les caches hexagonaux sont :

22JUN2015A15HEUES30DEVANTLETILLEUL	<i>22 juin 2015 à 15 heures devant le tilleul</i>
26RUEDUMERILPARIS13LE22JUINA15HEURES	<i>26 rue Duméril Paris 13. Le 22 juin à 15 heures</i>
AHUITHEURESCDEVANTLAPOSTE	<i>À huit heures devant la Poste</i>