Solution du problème n° 122

Au sujet du Petit Poucet

proposé par André Stef

Rappel de l'énoncé : *"Il était une fois un Bûcheron et une Bûcheronne qui avaient sept enfants tous Garçons. L'aîné n'avait que dix ans, et le plus jeune n'en avait que sept."*
Voici les deux premières phrases de l'histoire du Petit Poucet de Charles Perrault, conte plutôt bien connu. Le rapport avec le Petit Vert vient de la troisième phrase :
"On s'étonnera que le Bûcheron ait eu tant d'enfants en si peu de temps ; mais c'est que sa femme allait vite en besogne, et n'en faisait pas moins que deux à la fois…"

Un mathématicien pourra avoir (et à eu) cette idée bizarre de chercher quelles ont pu être les naissances possibles. Ainsi cela a pu être dans l'ordre des jumeaux, puis des triplés puis des jumeaux (qu'on codera (2,3,2)) ou des triplés puis des jumeaux puis à nouveau des jumeaux (3,2,2) ,...

Question 1 : Enoncer toutes les naissances possibles répondant aux contraintes formulées.

Question 2 : Généralisation. Le nombre d'enfants n'est plus 7 mais un paramètre entier *n.* Dénombrer le nombre de naissances possibles en fonction de *n*.

Solution proposée par Jacques Choné

Il s'agit de dénombrer les décompositions (où l'on tient compte de l'ordre des termes) de l'entier n en sommes d'entiers au moins égaux à 2. Dans toute la suite le mot décomposition sera employé dans ce sens. Notons que dans notre contexte une somme d'entiers peut se réduire à un seul terme.

Soit v_n le nombre de ces décompositions. Nous allons démontrer que pour tout $n\geq 1$, on a $v_n=f_{n-1}$ où $(f_n)_n$ désigne la suite de Fibonacci définie par $f_0=0$, $f_1=1$ ... et pour $n\geq 2$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

On conviendra dans cette étude que si n est un entier (relatif) et k un entier naturel, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est nul si $n<k$.

Pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et k au moins égal à 1, on note $v(n,k)$ le nombre des décompositions de n ayant k sommants (on a évidemment $v(n,k)=0$ si $n\leq 0$).

Montrons par récurrence, que pour tout entier $k\geq 1$, on a pour tout entier n : $v(n,k)=\binom{n-k-1}{k-1}$.

On a, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $v(n,1)=\binom{n-2}{0}$ (car ce nombre est nul si $n<2$ et égal à 1 si $n\geq 2$). La proposition est donc vraie pour $k=1$.

Soit k un entier au moins égal à 1. Supposons que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $v(n,k)=\binom{n-k-1}{k-1}$.

retour au sommaire

En dénombrant les décompositions de n en $k+1$ sommants suivant la valeur i du premier terme, on obtient (on notera que dans les sommes il y a seulement un nombre fini de termes non nuls) :

$$v(n,k+1)=\sum_{i\geq 2} v(n-i,k)=\sum_{i\geq 2}\binom{n-i-k-1}{k-1}=\sum_{l\leq n-k-3}\binom{l}{k-1}=\binom{n-k-2}{k}$$

Ce qui termine la récurrence.

On en déduit que : $v_n=\sum_{k\geq 1}\binom{n-k-1}{k-1}=\sum_{l\geq 0}\binom{n-2-l}{l}=f_{n-1}$,

car il est connu que les sommes des termes des diagonales montantes du tableau de Pascal sont les nombres de Fibonacci $\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}=f_{n+1}\right)$

Remarque : Il est facile de montrer que le nombre de décompositions de n en sommes d'entiers au moins égaux à 1 est 2^{n-1} . Mais on pourrait aussi étudier le nombre de décompositions de n en sommes d'entiers au moins égaux à 3 (ou à tout entier fixé).

Remarques

1) Comme l'écrit Jacques Choné, sa solution autorise la décomposition en une seul part, contrairement au problème initial (des ainés et des "plus jeunes"). il y a donc un écart de 1 entre la formulation de sa réponse à la question 2 et la réponse de la question 1.

2) Une fois trouvée la solution et aperçue la solution de la suite de Fibonacci, on peut alors chercher une manière "élégante" (on dit encore "naturelle") de la faire apparaitre. Par exemple, en raisonnant sur la première part d'une décomposition (et non le nombre de parts), on peut constater :

- le nombre de décompositions de *n* où la première part vaut 2 est égal au nombre de décompositions de n-2,
- il y a bijection entre les décompositions de *n* où la première part est au moins égale à 3 et les décompositions de *n*-1 où la première part est au moins égale à 2 (considérer la fonction qui retranche 1 à la première part d'une décomposition de *n*, pour obtenir alors une décomposition de *n*-1).

Vous trouverez dans le site ci-dessous la réponse faite par cinq élèves du lycée Bichat de Lunéville, à qui cet énoncé avait été proposé dans le cadre de MATh.en.JEANS en 2013.
http://www.mathenjeans.fr/sites/default/files/poucet_luneville_bichat_2013_notes_et_liens.pdf

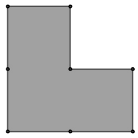
Il leur avait été demandé de répondre à la question 1 avec 8, 9, 10, 11 et 12 enfants (pas le cas général, dont la question n'était d'ailleurs pas envisagée car inconnue de l'auteur du sujet). Les résultats leur ont fait conjecturer le résultat général, qu'ils ont démontré (principe de la remarque 2 ci-dessus). Un joli travail de recherche, très bien présenté, que nous vous invitons vivement à consulter !

La rubrique « Problèmes » a un nouveau responsable : André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr

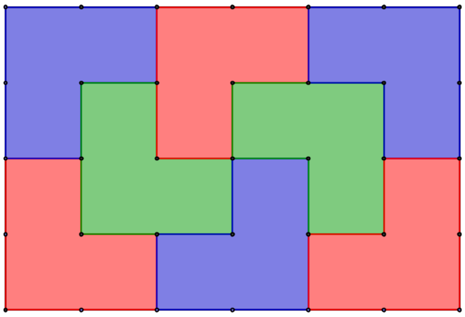
Problème du trimestre n°123

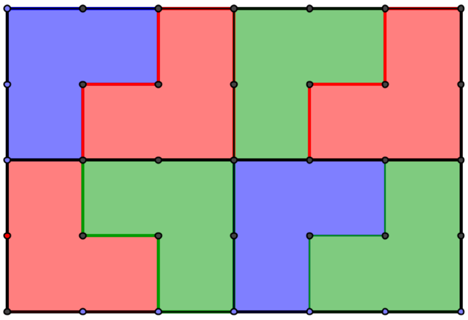
Pavages de rectangles par des « Petits L »

On dispose d'un nombre illimité de « briques » ayant la forme d'un « Petit L » (voir ci-contre). On conviendra que ces briques sont formées des trois carrés de côté une unité de longueur ; elles ont donc une aire de trois unités d'aire.



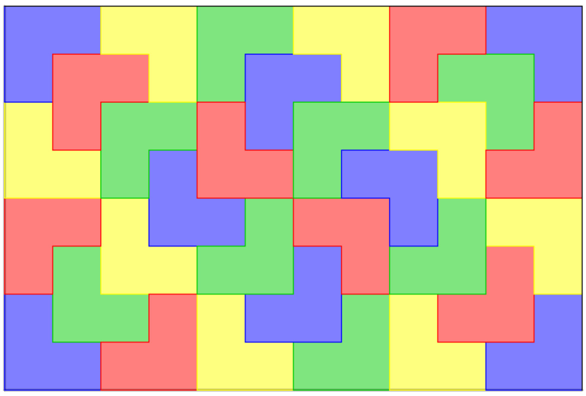
On cherche à « paver » des rectangles à l'aide de ces « Petits L ». Voici par exemple deux rectangles de dimensions 4x6.

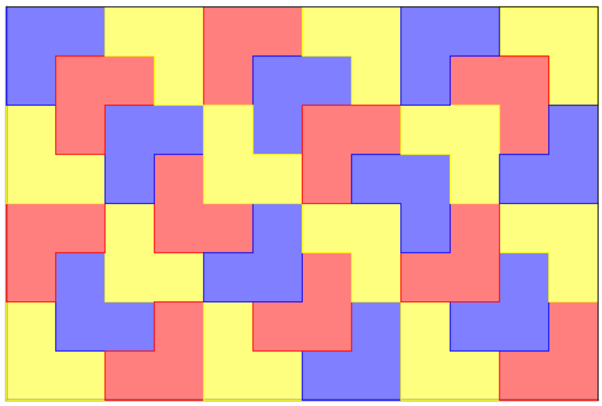




Celui de droite est constitué de quatre « sous-rectangles » de dimensions 2x3. Par contre, dans celui de gauche il n'y a aucun « sous-rectangle ».
La première question de notre problème est la suivante :
Comment caractériser les rectangles ne contenant aucun « sous-rectangle » ?

Ci-dessous, vous trouverez deux exemples de rectangles de dimensions 8x12. Vous remarquerez que celui de gauche admet un centre de symétrie, et qu'il est constitué d'autant de « Petits L » de chaque couleur. Celui de droite admet un centre de symétrie en ce qui concerne les formes, mais pas les couleurs.





On sait que toute « carte » peut être coloriée avec seulement quatre couleurs (*théorème dit des quatre couleurs*). Notre seconde question est la suivante :
Pour les rectangles ne comportant aucun « sous-rectangle », trois couleurs suffisent-elles ?

A propos des « Petits L », voir également le défi collège et le défi lycée dans ce même numéro.

Envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème, au responsable de cette rubrique : Andre.Stef@univ-lorraine.fr.

retour au sommaire